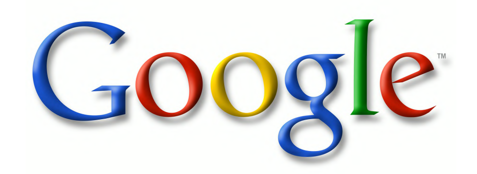
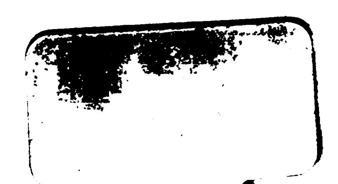



SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
VE RI TAS
CHRISTO ET ECCLESIAE



Lehrbuch

der

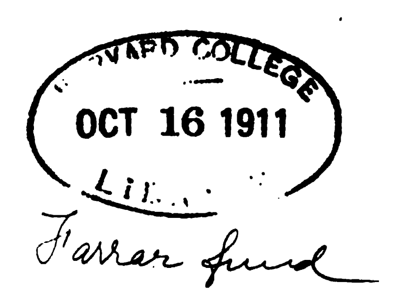
Hydrodynamik

von

Dr. W. Wien,
Professor der Physik an der Universität Würzburg.

Mit 18 Figuren.

Leipzig
Verlag von S. Hirzel
1900.



Vorwort.

Die Hydrodynamik ist neuerdings in Deutschland vernachlässigt worden. Nur einige Probleme, wie die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit wurden bei uns weitergeführt, während früher die Hydrodynamik gerade in Deutschland durch die bedeutendsten Mathematiker und Physiker die grösste Förderung erfahren hat. Der Grund liegt, wie mir scheint, in erster Linie an den divergenten Richtungen, in denen sich die beiden, früher eng zusammengehenden Wissenschaften der Mathematik und Physik augenblicklich bewegen. Der streng kritischen Richtung in der Mathematik sagen die physikalischen Anwendungen nicht zu und andrerseits beschäftigt sich die Physik mehr mit rein experimenteller Forschung oder auf theoretischem Gebiet mit solchen Fragen, die der Prüfung durch die gegenwärtig vorzugsweise ausgeübten experimentellen Methoden unmittelbar zugänglich sind.

Indessen ist gerade die Hydrodynamik am wenigsten abgeschlossen. Hier stimmen die thatsächlichen Vorgänge mit den theoretischen Folgerungen vielfach so ungenügend überein, dass die Technik sich für ihre Zwecke eine besondere Behandlungsweise hydrodynamischer Aufgaben, die meistens den Namen Hydraulik führt, zurechtgemacht hat. Bei dieser lassen nun sowohl die Grundlagen als auch die Schlussfolgerungen soviel an strenger Methode zu wünschen übrig, dass die meisten Ergebnisse keinen höhern Werth als den rein empirischer Formeln mit sehr beschränkter Giltigkeit besitzen.

Um diese grosse Lücke auszufüllen, ist ein weiterer Ausbau der Hydrodynamik als ein dringendes wissenschaftliches und praktisches Bedürfniss anzusehen.

Für den Mathematiker bietet sich ein Arbeitsfeld von unbegrenzter Ausdehnung, um für die Lösung specieller hydrodynamischer Probleme die Kräfte der neugeschaffenen analytischen

Methoden anzuspannen. Auch auf die reine mathematische Analyse kann die Prüfung durch die Anwendung nur wieder anregend zurückwirken.

In dem vorliegenden Lehrbuch habe ich versucht, eine Uebersicht über den gegenwärtigen Stand der Hydrodynamik dadurch zu geben, dass ich aus allen ihren Gebieten eine Anzahl der Ergebnisse namentlich auch neuerer Forschungen gegeben habe. Vollständigkeit zu erstreben war bei dem riesigen Umfang der Literatur von vornherein ausgeschlossen.

Ich habe das Hauptgewicht auf die speciellen Probleme gelegt. Ohne den Werth der allgemeinen Betrachtungen unterschätzen zu wollen, musste ich berücksichtigen, dass doch die Ergebnisse naturgemäss ebenfalls zu allgemeiner Natur sind, um grossen Nutzen in einzelnen Fällen gewähren zu können.

Die am Schluss jedes Abschnittes gegebenen kurzen Literaturangaben machen ebenfalls keinen Anspruch auf Vollständigkeit; sie sollen nur den Zweck haben, den Leser zu orientiren.

Von grossem Nutzen war mir das vortreffliche Lehrbuch von Lamb (Hydrodynamics; Cambridge 1895), das mir namentlich die Uebersicht über die schwer zugänglichen Arbeiten der englischen Forscher, denen die meisten neueren Fortschritte der Hydrodynamik zu danken sind, erleichterte. So habe ich namentlich in dem Abschnitt über Ebbe und Fluth, der, ausser den grundlegenden Arbeiten von Laplace, fast nur englische Untersuchungen enthält, vieles aus Lamb geschöpft.

Am Lesen der Correctur hat sich Herr Dr. Seitz betheiligt, wofür ich ihm hier meinen besten Dank ausspreche.

Wenn es durch diese Darstellung gelingen sollte, das Interesse der deutschen Mathematiker und Physiker an der Hydrodynamik wieder zu heben, so würde der Zweck des Buches erreicht sein.

Würzburg, im April 1900.

W. Wien.

Bezeichnungen.

Es ist davon Abstand genommen mit vollständig einheitlicher Bezeichnung, sodass dieselben Buchstaben immer dasselbe bedeuten, zu arbeiten. Abgesehen davon, dass die drei zur Verfügung stehenden Alphabete bei weitem nicht ausgereicht hätten und die Anwendung vieler Indices nothwendig geworden wäre, erschien es mir auch zweckmässiger, die Bezeichnungen, die sich schon in der Literatur eingebürgert haben, beizubehalten.

Abgesehen von einigen Formeln, bei denen die Bezeichnungsweise gleichgiltig ist, bezeichnen durchweg

t die Zeit,

x, y, z die rechtwinklichen Coordinaten eines Punktes,

u, v, w die Componenten der Geschwindigkeiten parallel den x, y, z,

ξ, η, ζ die Componenten der Drehungsgeschwindigkeiten um Axen, die den x, y, z parallel sind,

𝔯, 𝔶 die radialen und tangentialen Geschwindigkeiten bei Einführung von Cylindercoordinaten,

ϱ den Radius der Cylinderfläche,

r den Radius der Kugelfläche (beziehentlich die Entfernung zweier Punkte),

ω die Drehungsgeschwindigkeit eines starren Körpers,

Ω den Drehungswinkel,

X, Y, Z die Componenten der äusseren Kräfte,

X_x, Y_y, Z_z die Componenten der normalen Drucke,

$X_y = Y_x$, $Y_z = Z_y$, $Z_x = X_z$ die Componenten der tangentialen Drucke.

Das Potential der äusseren Kräfte ist im allgemeinen mit $\mathfrak{V}$, anfangs um Verwechslungen zu vermeiden, mit V bezeichnet.

Der Druck ist mit p bezeichnet. Bei der Theorie der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit bezeichnet dem allgemeinen Gebrauch entsprechend p die Drehungsgeschwindigkeit um die x-Axe.

Berichtigungen.

Es ist zu setzen:

S. 9, Z. 1 v. u. dx statt d,
S. 15, Z. 12 v. u. dS statt ds,
S. 18, Gleichungen 29) k^2 statt sk^2,
S. 73, Z. 14 v. o. $\left(\frac{d\varphi_1}{d\varrho}\right)^2 \frac{1}{R^2} + k_1\varphi_1^2 = \left(\frac{d\varphi_2}{d\varrho}\right)^2 \frac{1}{R^2} + k_2\varphi_2^2$,
S. 113, Z. 13 v. u. $R^2\pi$ statt $r^2\pi$,
S. 169, Z. 14 v. o. $\mathfrak{A}$ statt A,
S. 142, Z. 12 v. u. Punkten statt Punkt.

Inhaltsverzeichniss.

I. Die Grundlagen.

§ 1. Das Coordinatensystem. Die allgemeinen Gleichungen der Gestaltsänderung continuirlich verbreiteter Massen.

§ 2. Die Gleichung der continuirlichen Strömung und die Druckkräfte.

§ 3. Grenzbedingungen.

§ 4. Die Differentialgleichungen von Lagrange.

§ 5. Die Transformation von Clebsch.

§ 6. Uebertragung bekannter Bewegungen auf geometrisch ähnliche Formen.

§ 7. Mathematische Hülfssätze.

§ 8. Elliptische Coordinaten.

§ 9. Ringcoordinaten.

II. Allgemeine Bewegungen nicht reibender Flüssigkeiten.

III. Strömungen ohne Drehung der Flüssigkeitstheilchen.

IV. Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit.

§ 1. Bewegung in einfach zusammenhängenden Räumen.

§ 2. Bewegung fester Körper in mehrfach zusammenhängenden Räumen, die mit incompressibler Flüssigkeit gefüllt sind.

V. Theorie der Wellen.

§ 1. Theorie der Wellen an der Grenze zweier Flüssigkeiten.

§ 2. Näherungsmethode für die Theorie der Wellen an der Oberfläche einer Flüssigkeit.

§ 3. Einfluss von Ungleichmässigkeiten eines Strombettes auf die Gestalt der Oberfläche.

§ 4. Einzelne Wellen.

§ 5. Wellen, bei denen die Bedingung constanten Druckes streng erfüllbar ist.

§ 6. Schwingungen einer Flüssigkeit in einem prismatischen Gefäss.

VI. Ebbe und Fluth.

§ 1. Fluthwellen in Canälen.

§ 2. Fluthwellen auf ebenen, flachen Gewässern.

§ 3. Ebbe und Fluth einer ebenen Wasserfläche mit Berücksichtigung der Erddrehung.

§ 4. Ebbe und Fluth der Weltmeere.

VII. Reibung der Flüssigkeiten.

§ 1. Die Kugel.

§ 2. Der Cylinder.

§ 3. Einfluss der Reibung auf die Wellenbewegung.

§ 4. Fluthreibung.

§ 5. Einfluss der Reibung auf flache Cyklonen.

§ 6. Hydraulische Theorie der Strömungen in Canälen.

VIII. Gleichgewicht rotirender flüssiger Massen.

I. Die Grundlagen.

Die Hydrodynamik hat die Aufgabe, die Bewegungserscheinungen der Flüssigkeiten darzustellen. Als wesentlichste Eigenschaft der Flüssigkeiten bezeichnen wir die, dass sie Formänderungen keinen oder sehr geringen Widerstand entgegensetzen. Die Hydrodynamik bildet also einen Theil der Mechanik deformirbarer Körper.

Für die Behandlung dieser liegt die Vorstellung zu Grunde, dass die Körper den Raum stetig erfüllen, und die Frage nach der allgemeinsten Gestaltsänderung bestimmter Theile ist daher eine geometrische Aufgabe.

Die Bewegungen der Flüssigkeiten werden im übrigen von den allgemeinen Gesetzen der Mechanik beherrscht. Diese müssen demnach vorausgesetzt werden. Durch die Bewegungen üben nun angrenzende Flüssigkeitstheile Kräfte aufeinander aus, die dem Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung unterliegen und zu den von aussen her auf jedes Theilchen wirkenden hinzukommen.

Ausser den Gleichungen der Bewegung liefert die Bedingung der Unveränderlichkeit der Masse eine hinzuzufügende Gleichung. Dadurch ist die Bewegung im allgemeinen vollständig bestimmt, wenn die Anfangsbedingungen genügend vorgeschrieben sind. Sind diese, wie es meistens der Fall ist, nicht gegeben, so können sie ersetzt werden durch die Beschränkungen, die der Bewegung der Flüssigkeit durch Anweisung eines Raumes von bestimmten Grenzen auferlegt werden. In speciellen Fällen ist die Bewegung durch die Bewegung an der Oberfläche des Raumes vollständig bestimmt. Sonst müssen noch weitere Bedingungen hinzugefügt werden.

Die Aufgaben der Hydrodynamik sind daher ausschliesslich mathematischer Natur, und die Grenzen des von ihr zu erschliessen-

den Gebietes der Bewegungserscheinungen sind von den Hülfsmitteln festgelegt, die von der Analyse geliefert werden. Jeder wirkliche Fortschritt dieser würde auch eine unmittelbare Erweiterung irgend eines Gebietes der Hydrodynamik ermöglichen.

§ 1.

Das Coordinatensystem und die allgemeinen Gleichungen der Gestaltsänderung.

Bevor wir zu der Aufstellung der Differentialgleichungen der Hydrodynamik schreiten, müssen wir die Richtungen des gewählten Coordinatensystems festlegen und die allgemeinste mögliche Bewegung eines kleinen Theils eines deformirbaren Körpers ableiten.

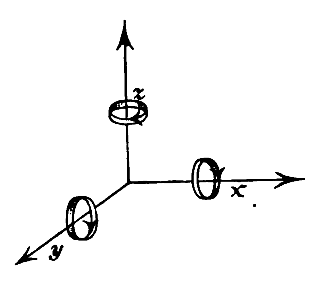


Fig. 1.

Das Coordinatensystem ist durch die Figur 1 erläutert. Die Richtungen der Pfeile parallel den Axen geben die Richtungen der positiv wachsenden Coordinaten, die Richtungen der Pfeile um die Axen geben die Richtungen der positiven Drehungen.

Wir nehmen zwei rechtwinklige Coordinatensysteme als gegeben an, so dass die Coordinaten desselben Punktes im einen x, y, z, im anderen x', y', z' sind. Beide mögen denselben Anfangspunkt haben. Dann ist

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \end{aligned} \qquad 1)$$

und auch

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z. \end{aligned} \qquad 2)$$

Da nun die Entfernung des Punktes vom Anfangspunkte der Coordinatensysteme $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 &= 1 \qquad & \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 &= 0 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 &= 1 \qquad & \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 &= 0 \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1 \qquad & \alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1 &= 0 \end{aligned} \qquad 3)$$

$$\begin{array}{ll} \alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 + \gamma_1{}^2 = 1 & \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 = 0 \\ \alpha_2{}^2 + \beta_2{}^2 + \gamma_2{}^2 = 1 & \gamma_1 \alpha_1 + \gamma_2 \alpha_2 + \gamma_3 \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3{}^2 + \beta_3{}^2 + \gamma_3{}^2 = 1 & \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \gamma_3 = 0. \end{array} \qquad 4)$$

Wir bezeichnen mit einer Dilatation in drei aufeinander senkrechten Richtungen solche Veränderungen der Coordinaten der materiellen Punkte, bei denen die Coordinate x um das Stück $\varepsilon_1 x$, y um $\varepsilon_2 y$, z um $\varepsilon_3 z$ wächst, wo die ε constante, sehr kleine Grössen sind.

Es seien x, y, z die Coordinaten eines materiellen Punktes vor der Ausdehnung, x', y', z' die Richtungen, parallel denen die Dilatation erfolgt. Ferner seien x_1, y_1, z_1 die Coordinaten nach der Ausdehnung.

Dann ist nach 1)

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 (1 + \varepsilon_1) x' + \alpha_2 (1 + \varepsilon_2) y' + \alpha_3 (1 + \varepsilon_3) z' \\ y_1 &= \beta_1 (1 + \varepsilon_1) x' + \beta_2 (1 + \varepsilon_2) y' + \beta_3 (1 + \varepsilon_3) z' \\ z_1 &= \gamma_1 (1 + \varepsilon_1) x' + \gamma_2 (1 + \varepsilon_2) y' + \gamma_3 (1 + \varepsilon_3) z', \end{aligned}$$

also nach 2) mit Rücksicht auf 3) und 4)

$$\begin{aligned} \delta x = x_1 - x &= x(\alpha_1{}^2 \varepsilon_1 + \alpha_2{}^2 \varepsilon_2 + \alpha_3{}^2 \varepsilon_3) + y(\alpha_1 \beta_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \beta_2 \varepsilon_2 + \alpha_3 \beta_3 \varepsilon_3) \\ &\quad + z(\alpha_1 \gamma_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \gamma_2 \varepsilon_2 + \alpha_3 \gamma_3 \varepsilon_3) \\ \delta y = y_1 - y &= x(\beta_1 \alpha_1 \varepsilon_1 + \beta_2 \alpha_2 \varepsilon_2 + \beta_3 \alpha_3 \varepsilon_3) + y(\beta_1{}^2 \varepsilon_1 + \beta_2{}^2 \varepsilon_2 + \beta_3{}^2 \varepsilon_3) \\ &\quad + z(\beta_1 \gamma_1 \varepsilon_1 + \beta_2 \gamma_2 \varepsilon_2 + \beta_3 \gamma_3 \varepsilon_3) \qquad 5) \\ \delta z = z_1 - z &= x(\gamma_1 \alpha_1 \varepsilon_1 + \gamma_2 \alpha_2 \varepsilon_2 + \gamma_3 \alpha_3 \varepsilon_3) + y(\gamma_1 \beta_1 \varepsilon_1 + \gamma_2 \beta_2 \varepsilon_2 + \gamma_3 \beta_3 \varepsilon_3) \\ &\quad + z(\gamma_1{}^2 \varepsilon_1 + \gamma_2{}^2 \varepsilon_2 + \gamma_3{}^2 \varepsilon_3). \end{aligned}$$

Hier sind die Grössen δx, δy, δz von derselben Ordnung wie die ε.

Aus den Gleichungen 5) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta x}{\partial x} &= \alpha_1{}^2 \varepsilon_1 + \alpha_2{}^2 \varepsilon_2 + \alpha_3{}^2 \varepsilon_3, \; \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta z}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial z}\right) = \beta_1 \gamma_1 \varepsilon_1 + \beta_2 \gamma_2 \varepsilon_2 + \beta_3 \gamma_3 \varepsilon_3 \\ \frac{\partial \delta y}{\partial y} &= \beta_1{}^2 \varepsilon_1 + \beta_2{}^2 \varepsilon_2 + \beta_3{}^2 \varepsilon_3, \; \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta x}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial x}\right) = \gamma_1 \alpha_1 \varepsilon_1 + \gamma_2 \alpha_2 \varepsilon_2 + \gamma_3 \alpha_3 \varepsilon_3 \qquad 6) \\ \frac{\partial \delta z}{\partial z} &= \gamma_1{}^2 \varepsilon_1 + \gamma_2{}^2 \varepsilon_2 + \gamma_3{}^2 \varepsilon_3, \; \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial y}\right) = \alpha_1 \beta_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \beta_2 \varepsilon_2 + \alpha_3 \beta_3 \varepsilon_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta z}{\partial y} &= \frac{\partial \delta y}{\partial z} \\ \frac{\partial \delta x}{\partial z} &= \frac{\partial \delta z}{\partial x} \qquad 6a) \\ \frac{\partial \delta y}{\partial x} &= \frac{\partial \delta x}{\partial y}. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun eine Drehung eines Theiles des Körpers. Zunächst nehmen wir eine solche um eine der z-Axe parallele Drehungsaxe an. Die Coordinaten derselben seien x_0, y_0. Bei einer sehr kleinen Drehung beschreibt der Punkt x, y einen Bogen, dessen Länge sehr klein ist und dann als gerade Linie angesehen werden kann. Bezeichnen wir den kleinen Drehungswinkel mit $\mathfrak{z}$, so sind die Projectionen des Bogens auf die Axen der y und x die Grössen $\mathfrak{z}\,(x - x_0)$ und $\mathfrak{z}\,(y - y_0)$. Da durch die Drehung in dem durch die Figur angedeuteten Sinne die x-Coordinate verkleinert, die y-Coordinate vergrössert wird, haben wir durch die Drehung die Aenderung $dx = -(y - y_0)\mathfrak{z}$, $dy = (x - x_0)\mathfrak{z}$ hervorgerufen. So lange die Drehungswinkel unendlich klein sind, so dass die Bögen noch als gerade betrachtet werden können, setzen sich Drehungen um die drei Coordinataxen einfach wie Verschiebungen zusammen.

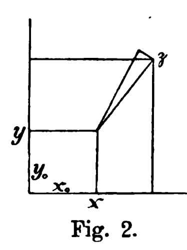


Fig. 2.

Wir erhalten also folgendes Schema, wenn um alle drei Axen Drehungen mit den Winkeln $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ stattfinden:

$$\begin{aligned} dx &= (z - z_0)\mathfrak{y} - (y - y_0)\mathfrak{z} \\ dy &= (x - x_0)\mathfrak{z} - (z - z_0)\mathfrak{x} \\ dz &= (y - y_0)\mathfrak{x} - (x - x_0)\mathfrak{y}. \end{aligned} \qquad 7)$$

Für die Punkte, für die das Doppelverhältniss

$$x - x_0 : y - y_0 : z - z_0 = \mathfrak{x} : \mathfrak{y} : \mathfrak{z}$$

gilt, verschwinden dx, dy, dz; dadurch ist also die Lage der Drehungsaxe der resultirenden Drehung dargestellt, da diese dadurch definirt ist, dass die in ihr liegenden Punkte durch die Drehung ihre Lage nicht ändern.

Aus den Gleichungen 7) folgt

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{x} &= \frac{\partial dz}{\partial y} - \frac{\partial dy}{\partial z} \\ 2\mathfrak{y} &= \frac{\partial dx}{\partial z} - \frac{\partial dz}{\partial x} \\ 2\mathfrak{z} &= \frac{\partial dy}{\partial x} - \frac{\partial dx}{\partial y} \end{aligned} \qquad 8)$$

da

$$\begin{aligned} \frac{\partial dx}{\partial z} &= \mathfrak{y} \qquad & \frac{\partial dx}{\partial y} &= -\mathfrak{z} \\ \frac{\partial dy}{\partial x} &= \mathfrak{z} \qquad & \frac{\partial dy}{\partial z} &= -\mathfrak{x} \end{aligned} \qquad 9)$$

$$\frac{\partial dz}{\partial y} = \mathfrak{x} \qquad \frac{\partial dz}{\partial x} = -\mathfrak{y}$$

sind.

Wenn wir die Drehungswinkel $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ als beliebig ansehen, können wir diese so wählen, dass

$$\frac{\partial \delta z}{\partial y} = \frac{\partial dz}{\partial y}$$
$$\frac{\partial \delta x}{\partial z} = \frac{\partial dx}{\partial z}$$
$$\frac{\partial \delta y}{\partial x} = \frac{\partial dy}{\partial x}$$

werden. Dann sind

$$\frac{\partial \delta y}{\partial z} = -\frac{\partial dy}{\partial z}$$
$$\frac{\partial \delta z}{\partial x} = -\frac{\partial dz}{\partial x}$$
$$\frac{\partial \delta x}{\partial y} = -\frac{\partial dx}{\partial z}.$$

Addiren wir also die ersten drei rechtsstehenden, von den Drehungen herrührenden Grössen 8) zu den Gleichungen 6), so erhalten wir die folgenden Ausdrücke, wenn wir 6a) und 5) berücksichtigen, die erste Reihe mit x, die zweite mit y, die dritte mit z multipliciren und zu drei entsprechenden Gruppen addiren:

$$\begin{aligned} & x\frac{\partial \delta x}{\partial x} + y\frac{\partial \delta x}{\partial y} + z\frac{\partial \delta x}{\partial z} \\ & x\frac{\partial \delta y}{\partial x} + y\frac{\partial \delta y}{\partial y} + z\frac{\partial \delta y}{\partial z} \\ & x\frac{\partial \delta z}{\partial x} + y\frac{\partial \delta z}{\partial y} + z\frac{\partial \delta z}{\partial z} \end{aligned} \qquad 10)$$

als Aenderung der drei Coordinaten durch Ausdehnung und Drehung. Durch Verschieben des Anfangspunkts können wir immer bewirken, dass x, y, z unendlich klein sind.

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} & \delta x = x_2 - x \quad , \quad \delta y = y_2 - y \quad , \quad \delta z = z_2 - z \\ & \frac{\partial \delta x}{\partial x} = \frac{\partial x_2}{\partial x} - 1 \, , \quad \frac{\partial \delta y}{\partial x} = \frac{\partial y_2}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial \delta z}{\partial x} = \frac{\partial z_2}{\partial x} \\ & \frac{\partial \delta x}{\partial y} = \frac{\partial x_2}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial \delta y}{\partial y} = \frac{\partial y_2}{\partial y} - 1 \, , \quad \frac{\partial \delta z}{\partial y} = \frac{\partial z_2}{\partial y} \\ & \frac{\partial \delta x}{\partial z} = \frac{\partial x_2}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial \delta y}{\partial z} = \frac{\partial y_2}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial \delta z}{\partial z} = \frac{\partial z_2}{\partial z} - 1. \end{aligned} \qquad 11)$$

Die allgemeinste mögliche, unendlich kleine Veränderung wird durch die Gleichungen ausgedrückt:

$$\begin{aligned} x'_2 &= a + x_2 = a + \frac{\partial x_2}{\partial x}\, x + \frac{\partial x_2}{\partial y}\, y + \frac{\partial x_2}{\partial z}\, z \\ y'_2 &= b + y_2 = b + \frac{\partial y_2}{\partial x}\, x + \frac{\partial y_2}{\partial y}\, y + \frac{\partial y_2}{\partial z}\, z \\ z'_2 &= c + z_2 = c + \frac{\partial z_2}{\partial x}\, x + \frac{\partial z_2}{\partial y}\, y + \frac{\partial z_2}{\partial z}\, z. \end{aligned} \qquad 12)$$

Die Grössen a, b, c bedeuten eine Verschiebung der Coordinaten ohne sonstige Veränderung. Berücksichtigen wir, dass die Ausdrücke 10) mit Rücksicht auf 11)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x_2}{\partial x}\, x + \frac{\partial x_2}{\partial y}\, y + \frac{\partial x_2}{\partial z}\, z - x \\ &\frac{\partial y_2}{\partial x}\, x + \frac{\partial y_2}{\partial y}\, y + \frac{\partial z_2}{\partial z}\, z - y \\ &\frac{\partial z_2}{\partial x}\, x + \frac{\partial z_2}{\partial y}\, y + \frac{\partial z_2}{\partial z}\, z - z \end{aligned}$$

werden, so würden durch diese Ausdrücke die Veränderungen der Coordinaten gegeben, die ein Punkt durch die Ausdehnung und die Drehung erfährt. Dieselbe Veränderung wird durch die Gleichungen 12) ausgedrückt, wenn man $a = b = c = 0$ setzt.

Die allgemeinste mögliche Veränderung durch Deformation lässt sich daher zusammensetzen durch eine Ausdehnung, eine Drehung und eine Verschiebung ohne sonstige Veränderung.

Die Veränderungen durch Ausdehnung und Drehung sollten klein sein. Betrachten wir die in einem Zeitelement dt vor sich gehenden, so ist diese Bedingung erfüllt. Wir führen dann die Geschwindigkeiten ein und können dann die endlichen Veränderungen erst durch die Integration der Differentialgleichungen erhalten. Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \xi\, dt & \mathfrak{y} &= \eta\, dt & \mathfrak{z} &= \zeta\, dt \\ \frac{dx}{dt} &= u & \frac{dy}{dt} &= v & \frac{dz}{dt} &= w, \end{aligned}$$

dann folgt aus 8)

$$\begin{aligned} 2\xi &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ 2\eta &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ 2\zeta &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \qquad 13)$$

§ 2.

Die Gleichung der continuirlichen Strömung und die Druckkräfte.

Wir gehen jetzt dazu über, die bestimmenden Gleichungen der Hydrodynamik abzuleiten. Die Componenten der Geschwindigkeiten werden wir wie oben so auch fortdauernd mit u, v, w bezeichnen. Die Dichtigkeit mit s. Die rechtwinkligen Coordinaten mit x, y, z.

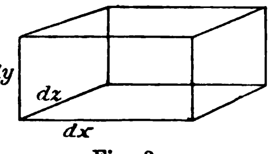


Fig. 3.

Betrachten wir Fig. 3 ein rechtwinkliges Parallelepipedon mit den Kantenlängen dx, dy, dz. Durch die Seitenfläche $dy\,dz$ strömt während dt die Flüssigkeitsmenge $dt\,s\,u\,dy\,dz$ ein. An den gegenüberliegenden Seite ist die Coordinate x um dx gewachsen, dort ist also die ausströmende Menge nicht $dt\,s\,u\,dy\,dz$, sondern $dt\left(su + \frac{\partial}{\partial x}(su)\,dx\right)dy\,dz$. Es bleibt also in dem Raumelement zurück die Menge

$$-\,dt\,\frac{\partial}{\partial x}(su)\,dx\,dy\,dz.$$

Das entsprechende findet an den anderen Seiten statt, und die gesammte zurückgebliebene Flüssigkeitsmenge ist also

$$-\,dt\left(\frac{\partial(su)}{dx} + \frac{\partial(sv)}{\partial y} + \frac{\partial(sw)}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.$$

Diese Menge muss also gleich der Aenderung der Flüssigkeitsmenge des Volumelements während dt sein. Diese Menge ist

$$s\,dx\,dy\,dz.$$

Ihre Aenderung während dt ist

$$\frac{\partial}{\partial t}(s\,dx\,dy\,dz)\,dt$$

oder, da $dx\,dy\,dz$ unverändert bleibt,

$$\frac{\partial s}{\partial t}\,dt\,.\,dx\,dy\,dz.$$

Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke ergiebt sich

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial(su)}{\partial x} + \frac{\partial(sv)}{\partial y} + \frac{\partial(sw)}{\partial z} = 0. \qquad 14)$$

Ist die Flüssigkeit nicht zusammendrückbar, so ist s constant. Dann wird wie Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \qquad 14a)$$

Hierdurch ist eine bei allen Flüssigkeitsbewegungen nothwendig zu erfüllende Gleichung gegeben.

Wir definiren als Druckkräfte solche Kräfte, die auf die Oberfläche eines Körpers wirken, und unterscheiden gleich im allgemeinen Falle normale Druckkräfte als solche, die in der Richtung der Normale wirken, von tangentialen, die in der Richtung der Tangente der Oberfläche wirken.

Sei n die nach dem Innern des Körpers gerichtete Normale. Dann ist X_x der normale Druck, wenn die Normale parallel x ist, X_y und X_z sind die Componenten des tangentialen Druckes, wenn die Normale parallel y oder z liegt.

Bezeichnet man mit X_n die Componente des Gesammtdruckes, der auf ein Element wirkt, dessen Normale n ist, so ist dieser Druck aus normalem und tangentialem zusammengesetzt. Die Componente des normalen Druckes parallel x ist $X_x = X_n \cos nx$, wo nx die Richtung bezeichnet, die die Normale n mit der x-Axe bildet.

Die tangentialen Drucke sind $X_y = X^n \cos ny$, $X_z = X_n \cos nz$, wo nz und ny entsprechende Bedeutung haben.

Aus den drei Gleichungen folgt, da $\cos^2 nx + \cos^2 ny + \cos^2 nz = 1$ ist,

$$X_n = X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz.$$

Hierzu lassen sich die entsprechenden hinzufügen:

$$Y_n = Y_x \cos nx + Y_y \cos ny + Y_z \cos nz \qquad 15)$$

$$Z_n = Z_x \cos nx + Z_y \cos ny + Z_z \cos nz.$$

Die eigentlichen Bewegungsgleichungen lassen sich aus Newtonschen Gleichungen der Mechanik direct ableiten.

Nach diesen ist die Masse eines Körpers multiplicirt mit der Beschleunigung gleich der Summe der beschleunigenden Kräfte. Die Beschleunigung wird durch die Zunahme der Geschwindigkeit während des Zeitelements dt gemessen.

Die beschleunigenden Kräfte, die auf einen kleinen Raumtheil der Flüssigkeit einwirken, sind erstens die äusseren Kräfte, wie z. B. die Schwere, ausserdem die Druckkräfte, die auf die Oberfläche des betrachteten Körperelements einwirken.

Als Raumelement nehmen wir wieder ein unendlich kleines Parallelepipedon, dessen Kanten den Coordinataxen parallel sind (Fig. 3).

Bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen müssen die beschleunigenden Kräfte so verlegt werden, dass sie alle auf den im Mittelpunkt des Parallelepipedons liegenden Schwerpunkt einwirken. Die Aenderung der Geschwindigkeit dieses Punktes misst dann die Beschleunigung.

Die normalen Druckkräfte X_x, Y_y, Z_z wirken proportional der Grösse der Fläche, also auf jede Seitenfläche des Parallelepipedons so ein, als ob die ganze Kraft nur im Mittelpunkte der Seitenfläche angreifen würde. Da nun der Schwerpunkt des Körperelements auf der in der Richtung der Kraft durch ihren Angriffspunkt liegenden Geraden sich befindet, so wirken alle die normalen Druckkräfte so, als ob sie im Mittelpunkt des Parallelepipedons angreifen würden.

Auf den Seitenflächen des Raumelements, dessen Coordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ sind, liegen die Richtungen der Kräfte in der Richtung der nach aussen zeigenden Normalen. Ihre Grösse ist also

$$-\left(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x}\,dx\right) dy\,dz$$
$$-\left(Y_y + \frac{\partial Y_y}{\partial y}\,dy\right) dx\,dz$$
$$-\left(Z_z + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\,dz\right) dx\,dy,$$

während auf die anderen die Kräfte

$$X_x\,dy\,dz$$
$$Y_y\,dx\,dz$$
$$Z_z\,dx\,dy$$

wirken.

Die Componenten der gesammten beschleunigenden Kraft, die von den normalen Drucken herrührt, sind also

$$-\frac{\partial X_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz$$
$$-\frac{\partial Y_y}{\partial y}\,dx\,dy\,dz$$
$$-\frac{\partial Z_z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz.$$

Ebenso wirken auf die Seitenflächen, deren Coordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ sind, die tangentialen Componenten

$$-\left(Y_x + \frac{\partial Y_x}{\partial x}\,dx\right) dy\,dz \quad \text{und} \quad -\left(Z_x + \frac{\partial Z_x}{\partial x}\,d\right) dy\,dz$$

$$-\left(X_y + \frac{\partial X_y}{\partial y}\,dy\right) dx\,dz \quad \text{und} \quad -\left(Z_y + \frac{\partial Z_y}{\partial y}\,dy\right) dx\,dz$$

$$-\left(Y_z + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\,dz\right) dx\,dy \quad \text{und} \quad -\left(X_z + \frac{\partial X_z}{\partial z}\,dz\right) dx\,dy,$$

während sie an den anderen Flächen, wo die Normale die entgegengesetzte Richtung hat,

$$Y_x \text{ und } Z_x$$
$$X_y \text{ und } Z_y$$
$$Y_z \text{ und } X_z \quad \text{sind.}$$

Zusammen geben sie

$$-\,dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right)$$
$$-\,dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)$$
$$-\,dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y}\right).$$

$s\,dx\,dy\,dz$ ist die Masse des Volumelements. Bezeichnen wir noch mit X, Y, Z die Componenten der auf die Masseneinheit wirkenden Kräfte, so lauten die Gleichungen der Bewegung:

$$\begin{aligned} s\frac{du}{dt} &= sX - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z} \\ s\frac{dv}{dt} &= sY - \frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\ s\frac{dw}{dt} &= sZ - \frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z}. \end{aligned} \tag{16}$$

Die tangentialen Kräfte üben im allgemeinen auf das Volumelement Drehungsmomente aus.

Um die x-Axe drehend wirkt das Moment (Kraft multiplicirt mit dem Hebelarm)

$$Z_y\,dx\,dz\,.\,dy - Y_z\,dx\,dy\,.\,dz,$$

um die y-Axe

$$X_z\,dx\,dy\,.\,dz - Z_x\,dy\,dz\,.\,dx,$$

um die z-Axe

$$Y_x\,dy\,dz\,.\,dx - X_y\,dx\,dz\,.\,dy.$$

Denken wir uns nun eine geschlossene Fläche in der Flüssigkeit, so dass das betrachtete Volumelement in dem von ihr umschlossenen Raum liegt. Auf diese Oberfläche mögen beliebige Druckkräfte einwirken, die auch Drehungen des ganzen umschlossenen Volumens im allgemeinen bewirken können. Wir nehmen dann

an, dass die ins Innere sich fortpflanzenden Druckkräfte nicht auch die einzelnen Volumelemente für sich drehen können.

Dies ist aber nur der Fall, wenn die Drehungsmomente verschwinden, wenn also

$$X_y = Y_x, \quad Z_x = X_z, \quad Y_z = Z_y \text{ sind.} \qquad 17)$$

Diese Gleichungen sind für die Mechanik wägbarer Körper immer erfüllt. Dagegen sind sie nicht giltig bei den Spannungen, wie sie im Innern magnetisirter Körper auftreten können.

Nach den bisherigen Betrachtungen erleidet im allgemeinen jedes Flächenelement gleichzeitig tangentiale und vertikale Drucke. Es giebt aber an jeder Stelle drei aufeinander senkrechte Flächenelemente, für die die tangentialen Drucke Null sind. Es bleibt dann nur ein senkrechter Druck übrig, den wir mit p bezeichnen wollen. Für jedes dieser Flächenelemente ist

$$X_n = p \cos nx, \quad Y_n = p \cos ny, \quad Z_n = p \cos nz.$$

Also ist nach 15)

$$\begin{aligned} X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz - p \cos nx &= 0 \\ Y_x \cos nx + Y_y \cos ny + Y_z \cos nz - p \cos ny &= 0 \\ Z_x \cos nx + Z_y \cos ny + Z_z \cos nz - p \cos nz &= 0. \end{aligned} \qquad 18)$$

Eliminirt man aus den Gleichungen die $\cos nx$, $\cos ny$ und $\cos nz$, so sieht man, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} X_x - p & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y - p & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z - p \end{vmatrix} \qquad 19)$$

verschwinden muss, weil wegen der Gleichung $\cos^2 nx + \cos^2 ny + \cos^2 nz = 1$ die Grössen $\cos nx$, $\cos ny$, $\cos nz$ nicht gleichzeitig verschwinden können.

Es ergiebt sich also für p eine cubische Gleichung, deren Wurzeln die auf die drei Flächenelemente wirkenden Drucke ergeben.

Berücksichtigt man die Gleichung 17), so hat man dieselben Gleichungen wie bei der Bestimmung der Halbaxen der allgemeinen Fläche zweiten Grades, deren Gleichung

$$X_x x^2 + Y_y y^2 + Z_z z^2 + 2 Y_z yz + 2 Z_x zx + 2 X_y xy = A^2 \qquad 20)$$

ist, wenn x, y, z die Coordinaten eines Punktes bezeichnen.

Setzen wir nämlich $x = \varrho \cos nx$, $y = \varrho \cos ny$, $z = \varrho \cos nz$, so ist

$$\frac{A^2}{\varrho^2} = X_x^2 \cos^2 nx + Y_y^2 \cos^2 ny + Z_z^2 \cos^2 nz + 2\,Y_z \cos ny \cos nz$$
$$+ 2\,Z_x \cos nz \cos nx + 2\,X_y \cos nx \cos ny. \qquad 21)$$

ϱ ist dann der Radiusvector, der mit den Coordinaten die Winkel $\cos nx$, $\cos ny$, $\cos nz$ bildet. Für die Axen der Flächen zweiten Grades ist dieser Radiusvector ein Maximum oder Minimum.

Nun ist $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$; wenn dies einen Grenzwerth annehmen soll, so muss $x + z\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $y + z\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ sein.

Andererseits ist nach der Gleichung der Fläche

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{X_x x + X_y y + X_z z}{Z_x x + Z_y y + Z_z z}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{Y_x x + Y_y y + Y_z z}{Z_x x + Z_y y + Z_z z}.$$

Eliminirt man $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$, so erhält man

$$\begin{aligned} X_x x + X_y y + X_z z &= x\lambda \\ Y_x x + Y_y y + Y_z z &= y\lambda \\ Z_x x + Z_y y + Z_z z &= z\lambda \end{aligned} \qquad 22)$$

und es ergiebt sich für λ, wenn man die erste Gleichung mit x, die zweite mit y, die dritte mit z multiplicirt, alles addirt und die Gleichung der Fläche berücksichtigt,

$$A^2 = \varrho^2 \lambda.$$

Die Halbaxen erhält man aus 22) durch Elimination von x, y, z. Es ist λ gleich einer der Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} X_x - \lambda & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y - \lambda & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad 23)$$

und die Halbaxen p_1, p_2, p_3 ergeben sich aus der Gleichung

$$\varrho = \frac{A}{\sqrt{\lambda}}.$$

Die Gleichung 23) wird identisch mit 19), wenn $\lambda = p$ gesetzt wird. Die Normalen der Flächenelemente senkrechten Druckes sind also parallel den Hauptaxen der Fläche, deren Gleichung 20) ist.

Da nun die drei Axen der Flächen zweiten Grades senkrecht aufeinander stehen, so gilt dies auch für die Normalen der Flächen-

elemente, die nur senkrechten Druck erleiden. Diese drei Drucke bezeichnen wir mit p_1, p_2, p_3.

Setzen wir nun

$$\begin{aligned} X_x &= p_1\alpha_1{}^2 + p_2\alpha_2{}^2 + p_3\alpha_3{}^2 \\ Y_y &= p_1\beta_1{}^2 + p_2\beta_2{}^2 + p_3\beta_3{}^2 \\ Z_z &= p_1\gamma_1{}^2 + p_2\gamma_2{}^2 + p_3\gamma_3{}^2 \\ Y_z = Z_y &= p_1\beta_1\gamma_1 + p_2\beta_2\gamma_2 + p_3\beta_3\gamma_3 \\ Z_x = X_z &= p_1\gamma_1\alpha_1 + p_2\gamma_2\alpha_2 + p_3\gamma_3\alpha_3 \\ X_y = Y_x &= p_1\alpha_1\beta_1 + p_2\alpha_2\beta_2 + p_3\alpha_3\beta_3, \end{aligned} \tag{24}$$

wo $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ u. s. w. die Winkel bezeichnen, welche die Drucke p_1 u. s. w. mit den Coordinataxen bilden, so gelten hier die Gleichungen 15), weil die Druckrichtungen senkrecht aufeinander stehen. Wir erhalten dann mit Berücksichtigung von 4) die Gleichungen

$$\begin{aligned} (X_x - p_1)\alpha_1 + X_y\beta_1 + X_z\gamma_1 &= 0 \\ Y_x\alpha_1 + (Y_y - p_1)\beta_1 + Y_z\gamma_1 &= 0 \\ Z_x\alpha_1 + Z_y\beta_1 + (Z_z - p)\gamma_1 &= 0 \end{aligned}$$

und zwei symmetrische mit den Indices $_2$ und $_3$.

Es sind also p_1, p_2, p_3 die Wurzeln der durch die Determinante dargestellten cubischen Gleichung.

Vergleichen wir diese mit der Gleichung 19), so erhellt, dass durch die Ausdrücke 24) die verlangten Drucke dargestellt werden.

Es sind also alle Drucke auf p_1, p_2, p_3 zurückgeführt. Bei den Flüssigkeiten machen wir nun die Annahme, dass die Unterschiede der drei Drucke p_1, p_2, p_3 den Dilatationsgeschwindigkeiten $\frac{\varepsilon_1}{dt}, \frac{\varepsilon_2}{dt}, \frac{\varepsilon_3}{dt}$ proportional sind. Der Proportionalitätsfactor hängt von der Natur der Flüssigkeit ab; ausserdem sollen sie noch der Geschwindigkeit der Volumänderung, die ein Flüssigkeitstheilchen erleidet, proportional sein. Dies giebt eine zweite Constante, die aber nur bei zusammendrückbaren Flüssigkeiten Bedeutung hat. Wir setzen demnach

$$\begin{aligned} p_1 &= p - 2\frac{k^2}{dt}(\varepsilon_1 + \Theta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)) \\ p_2 &= p - 2\frac{k^2}{dt}(\varepsilon_2 + \Theta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)) \\ p_3 &= p - 2\frac{k^2}{dt}(\varepsilon_3 + \Theta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)). \end{aligned} \tag{25}$$

Ist $k^2 = 0$, so ist $p_1 = p_2 = p_3 = p$; dann sind überhaupt keine tangentialen Drucke vorhanden, wie dies bei ganz reibungslosen Flüssigkeiten der Fall ist. Die Constanten k und Θ sind die

Reibungsconstanten. Setzen wir diese Werthe von p_1, p_2, p_3 in die Gleichungen 24) und berücksichtigen die Gleichungen 6) des § 1, so erhalten wir, wenn wir wieder $\delta x = u dt$, $\delta y = v dt$, $\delta z = w dt$ machen,

$$
\left.\begin{aligned}
X_x &= p - 2k^2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \Theta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right)\\
Y_y &= p - 2k^2\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \Theta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right)\\
Z_z &= p - 2k^2\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \Theta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right)\\
Y_z &= Z_y = -k^2\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\\
Z_x &= X_z = -k^2\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\\
X_y &= Y_x = -k^2\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).
\end{aligned}\right\} \quad 26)
$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichungen 16), so erhalten wir

$$
\left.\begin{aligned}
s\frac{du}{dt} &= sX + k^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\
&\quad + k^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)(1 + 2\Theta) - \frac{\partial p}{\partial x}\\
s\frac{dv}{dt} &= sY + k^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\\
&\quad + k^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)(1 + 2\Theta) - \frac{\partial p}{\partial y}\\
s\frac{dw}{dt} &= sZ + k^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)\\
&\quad + k^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)(1 + 2\Theta) - \frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \quad 27)
$$

Ist die Flüssigkeit nicht zusammendrückbar, so ist

$$X_x + Y_y + Z_z = 3p$$

der Druck p das arithmetische Mittel aus den drei senkrechten Drucken. Nehmen wir an, dass dies auch für zusammendrückbare Flüssigkeiten gilt, so ist

$$\Theta = -\tfrac{1}{3}. \qquad 27\text{a})$$

Schliesslich haben wir für $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$ die vollständigen Werthe einzusetzen und erhalten dann für die hydrodynamischen Gleichungen die am meisten gebräuchliche Form.

$$X - \frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w - \frac{k^2}{s}\left[\Delta u - \frac{\partial\left(\frac{1}{s}\cdot\frac{ds}{dt}\right)}{\partial x}(1+2\Theta)\right]$$

$$Y - \frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w - \frac{k^2}{s}\left[\Delta v - \frac{\partial\left(\frac{1}{s}\cdot\frac{ds}{dt}\right)}{\partial y}(1+2\Theta)\right]$$

$$Z - \frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w - \frac{k^2}{s}\left[\Delta w - \frac{\partial\left(\frac{1}{s}\cdot\frac{ds}{dt}\right)}{\partial z}(1+2\Theta)\right]$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial(us)}{\partial x} + \frac{\partial(vs)}{\partial y} + \frac{\partial(ws)}{\partial z} = 0, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x}u + \frac{\partial s}{\partial y}v + \frac{\partial s}{\partial z}w. \tag{27b}$$

Hier ist zur Abkürzung für die vielfach vorkommenden Differentialausdrücke ein zusammenfassendes Zeichen gebraucht, das wir auch später anwenden werden. Es soll hiernach allgemein

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \text{ sein.} \tag{27c}$$

Wir stellen folgende Betrachtung über die Energie einer in einem geschlossenen Raum befindlichen Flüssigkeitsmasse an.

Zunächst gehen wir von den allgemeinen Bewegungsgleichungen aus.

Multipliciren wir die Gleichungen 16) mit δx, δy, δz und addiren sie, und bilden das Integral über einen geschlossenen Raum, dessen Oberflächenelement ds und nach aussen gerichtete Normale n ist, so erhalten wir bei partieller Integration

$$\iiint s\,dx\,dy\,dz\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)$$

$$= \iiint s\,dx\,dy\,dz\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) - \int dS(X_n\delta x + Y_n\delta y + Z_n\delta z)$$

$$+ \iiint dx\,dy\,dz\left[X_x\frac{\partial\delta x}{\partial x} + Y_y\frac{\partial\delta y}{\partial y} + Z_z\frac{\partial\delta z}{\partial z} + Y_z\left(\frac{\partial\delta y}{\partial z} + \frac{\partial\delta z}{\partial y}\right)\right.$$

$$\left. + Z_x\left(\frac{\partial\delta z}{\partial x} + \frac{\partial\delta x}{\partial z}\right) + X_y\left(\frac{\partial\delta x}{\partial y} + \frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)\right].$$

Die linke Seite giebt die Arbeitsleistung bei der Beschleunigung. Auf der rechten Seite stehen, 1. die Arbeit der äusseren Kräfte, 2. die Arbeit der auf die Oberfläche wirkenden Druckkräfte, und 3. die Arbeit, die bei der Deformation geleistet wird. Die letzte Arbeit giebt in einer Flüssigkeit die durch Reibung in Wärme verwandelte Energie an und die Compressionsarbeit

$$p\left(\frac{\partial \delta x}{\partial x}+\frac{\partial \delta y}{\partial y}+\frac{\partial \delta z}{\partial z}\right).$$

Wir multipliciren von den Gleichungen 27b) die erste mit u, die zweite mit v, die dritte mit w und addiren sie; wir setzen ferner $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$, bilden das Integral über einen geschlossenen Raum und integriren partiell nach x, y, z, so erhalten wir, wenn die X, Y, Z partielle Ableitung nach x, y, z einer Function V sind,

$$\iiint s\,dx\,dy\,dz\left(u\frac{\partial u}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial t}+w\frac{\partial w}{\partial t}\right)=$$

$$-\int dS\Big[\left(p - sV + \frac{s}{2}q^2\right)(u\cos nx + v\cos ny + w\cos nz)$$

$$-k^2\left\{2u\frac{\partial u}{\partial x}+v\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+w\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)+2\Theta u\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}\cos nx$$

$$-k^2\left\{2v\frac{\partial v}{\partial y}+w\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+u\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+2\Theta v\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}\cos ny$$

$$-k^2\left\{2w\frac{\partial w}{\partial z}+u\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+v\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)+2\Theta w\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}\cos nz\Big]$$

$$-k^2\iiint dx\,dy\,dz\left\{2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2\Theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\}$$

$$+\iiint dx\,dy\,dz\left[p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+V\frac{\partial s}{\partial t}-\frac{q^2}{2}\frac{\partial s}{\partial t}\right].$$

Setzen wir in dem obigen Ausdruck $\delta x = \frac{dx}{dt}dt$, $\delta y = \frac{dy}{dt}dt$, $\delta z = \frac{dz}{dt}dt$, so erhalten wir für die Energie, welche durch die Reibung während dt verbraucht wird, den Ausdruck

$$dt\iiint dx\,dy\,dz\left(X_x\frac{\partial u}{\partial x}+Y_y\frac{\partial v}{\partial y}+Z_z\frac{\partial w}{\partial z}+Y_z\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left.+Z_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)+X_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)$$

$$=-dt\,k^2\iiint\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2\Theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz.$$

Wir können dann die Raumintegrale in folgender Weise zusammenziehen. Es ist in jedem Raumelement

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(s\,q^2)\,dx\,dy\,dz = \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$-\left\{\frac{\partial}{\partial t}(Vs)+p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}=\frac{\partial F}{\partial t},$$

wenn L und F die kinetische und potentielle Energie bezeichnen. Wir können dann unsere Gleichung in folgender Form schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int dx\,dy\,dz\,(L+F)\,dt = \int dS\,(\mathfrak{u}\cos nx + \mathfrak{v}\cos ny + \mathfrak{w}\cos nz)\,dt$$
$$-\int\int\int dx\,dy\,dz\,R,$$

wo die Werthe $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, R zusammenfassende Bezeichnungen sind.

Das Raumintegral auf der rechten Seite giebt den während dt durch die Reibung in dem ganzen Raume verzehrten Energievorrath.

Auf der linken Seite steht die Aenderung des Energievorraths selbst. Die Gleichung spricht dann aus, dass sich der Energievorrath der in dem geschlossenen Raume befindlichen Flüssigkeit, abgesehen von der durch die Reibung zerstörten Energie, nur durch Strömung von Energie durch die Oberfläche verändern kann.

Man kann $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ die Componenten der strömenden Energie nennen.

§ 3.

Grenzbedingungen.

In den meisten hydrodynamischen Aufgaben hat man es mit einer begrenzten Flüssigkeit zu thun. Für diese Grenzen gelten Bedingungen, welche die möglichen Bewegungen der Flüssigkeit in bestimmter Weise einschränken.

Im allgemeinsten Falle wird die Oberfläche der Flüssigkeit durch eine Gleichung bestimmt, welche die Coordinaten und die Zeit enthält:

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

Betrachten wir hier die Zeit als unabhängige Variable, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

Die Oberfläche macht nun die Bewegung der Flüssigkeitstheilchen mit und deshalb ist $\frac{\partial x}{\partial t} = u$, $\frac{\partial y}{\partial t} = v$, $\frac{\partial z}{\partial t} = w$ zu setzen.

Wir haben also die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \qquad 28)$$

Denken wir uns bei constanter Zeit in die Flüssigkeit Linien gezogen, die an jeder Stelle der Geschwindigkeitsrichtung parallel laufen. Diese Linien wollen wir Stromlinien nennen. Dann sagt die Gleichung 28) aus, dass die Oberfläche zu jeder Zeit aus Stromlinien zusammengesetzt ist.

Die Oberfläche der Flüssigkeit ist eben dadurch definirt, dass durch sie niemals Flüssigkeit hindurchströmen kann.

Auch im Innern der Flüssigkeiten können solche Flächen aufgesucht werden. Dieselben haben ein wesentliches Interesse nur dann, wenn die Geschwindigkeiten an beiden Seiten der Fläche verschiedene Werthe haben. Eine solche Unstetigkeitsfläche wird sich im allgemeinen in der Flüssigkeit verschieben.

Ausser der durch die Gleichung 28) ausgesprochenen Grenzbedingung ist noch eine zweite zu berücksichtigen, die sich auf die Druckkräfte bezieht. Nach dem Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung müssen die Druckkräfte, die der berührende Körper auf die Flüssigkeit ausübt, den Druckkräften das Gleichgewicht halten, mit welchen die Flüssigkeit auf den Körper wirkt.

Die Kraft, welche der berührende Körper auf die Flüssigkeit ausübt, muss durch eine Hypothese näher bestimmt werden.

Die allgemeinste bisher gemachte Annahme beruht auf der Vorstellung, dass die tangentiale Kraft der relativen Geschwindigkeit der Flüssigkeit und des Körpers an der trennenden Fläche proportional ist. Der senkrechte Druck muss immer an beiden Seiten gleich sein, wenn das Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung erfüllt sein soll.

X_n, Y_n, Z_n sind die Componenten des gesammten Druckes in der Richtung der Normale n der Trennungsfläche.

$X_n \cos nx + Y_n \cos ny + Z_n \cos nz$ ist der senkrechte Druck, also $(X_n \cos nx + Y_n \cos ny + Z_n \cos nz) \cos nx$ u.s.w. die Componenten des senkrechten Druckes. Also sind $X_n - (X_n \cos nx + Y_n \cos ny + Z_n \cos nz) \cos nx$ u. s. w. die Componenten des tangentialen Druckes. Nennen wir die Geschwindigkeiten des Körpers u_1, v_1, w_1, so haben wir nach den gemachten Annahmen zu setzen.

$$X_n - (X_n \cos nx + Y_n \cos ny + Z_n \cos nz) \cos nx = \frac{sk^2}{l}(u_1 - u)$$

$$Y_n - (X_n \cos nx + Y_n \cos ny + Z_n \cos nz) \cos ny = \frac{sk^2}{l}(v_1 - v) \quad 29)$$

$$Z_n - (X_n \cos nx + Y_n \cos ny + Z_n \cos nz) \cos nz = \frac{sk^2}{l}(w_1 - w).$$

Hier bezeichnet l eine Constante, die von der Natur der sich berührenden Körper abhängt.

Die Reibungsconstante $\frac{k^2}{s}$ hat die Dimension $\left[\frac{L^2}{T}\right]$, wenn L eine Länge, T eine Zeit bezeichnet.

Da die Geschwindigkeit die Dimension $\left[\frac{L}{T}\right]$, der Druck die Dimension $\left[s\frac{L^2}{T^2}\right]$ hat, so hat die Constante l die Dimension $[L]$, ist also eine Länge. Dagegen hat die zweite Reibungsconstante Θ keine Dimension; sie ist eine reine Zahl.

Die Constante l wird häufig als Gleitungscoefficient bezeichnet.

Ist l Null, so haftet die Flüssigkeit fest an dem berührenden Körper, weil dann $u_1 = u$, $v_1 = v$, $w_1 = w$ sind.

Ist l unendlich, so ist

$$X_n : Y_n : Z_n = \cos nx : \cos ny : \cos nz.$$

Wir haben es dann nur mit einem senkrechten Druck zu thun.

§ 4.

Die Differentialgleichungen von Lagrange.

Für einzelne Fälle ist es zweckmässig, den Differentialgleichungen einer reibungslosen Flüssigkeit eine andere Gestalt zu geben. Wir können diese nach 27) in der Form schreiben:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X - \frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y - \frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = Z - \frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Wir setzen nun fest, dass die Coordinaten x, y, z eines identischen Flüssigkeitstheilchens als Functionen ihrer Anfangswerthe a, b, c zur Zeit $t = t_0$ und der Zeit t angesehen werden soll.

Auch der Druck p ist dann als Function von a, b, c und t anzusehen, so dass

$$\frac{\partial p}{\partial a} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a} \text{ u. s. w. ist.}$$

Um nun in den Gleichungen nur Differentialquotienten des Drucks nach den unabhängigen Variabeln a, b, c zu haben, multipliciren

wir die Gleichungen erst mit $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial a}$, dann mit $\frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial y}{\partial b}, \frac{\partial z}{\partial b}$, endlich mit $\frac{\partial x}{\partial c}, \frac{\partial y}{\partial c}, \frac{\partial z}{\partial c}$ und addiren jedesmal. Wir erhalten auf diese Weise

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial a} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial a} = 0\\
&\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial b} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial b} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial b} = 0 \qquad 30)\\
&\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial c} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial c} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial c} = 0.
\end{aligned}$$

Die Gleichung der Continuität muss für die Gleichungen von Lagrange besonders umgeformt werden.

Wir betrachten das Integral

$$\iiint F(a, b, c)\, da\, db\, dc$$

und führen die neuen Variabeln x_1, y_1, z_1 ein, welche Functionen von a, b, c sein sollen.

Dann wird

$$\iiint F(a, b, c)\, da\, db\, dc = \iiint f F_1(x_1, y_1, z_1)\, dx_1\, dy_1\, dz_1.$$

F_1 entsteht aus F, wenn man a, b, c durch x_1, y_1, z_1 ausdrückt, und die Function f tritt durch die Transformation von $da\, db\, dc$ hinzu. Bilden wir zunächst das Differential dx_1, so ist dabei dy_1 und dz_1 gleich Null zu setzen, weil diese Variabeln von x_1 unabhängig sind. Wir haben also

$$\begin{aligned}
dx_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial a} da + \frac{\partial x_1}{\partial b} db + \frac{\partial x_1}{\partial c} dc\\
0 &= \frac{\partial y_1}{\partial a} da + \frac{\partial y_1}{\partial b} db + \frac{\partial y_1}{\partial c} dc\\
0 &= \frac{\partial z_1}{\partial a} da + \frac{\partial z_1}{\partial b} db + \frac{\partial z_1}{\partial c} dc,
\end{aligned}$$

und hieraus folgt

$$da = \frac{\frac{\partial y_1}{\partial b}\frac{\partial z_1}{\partial c} - \frac{\partial y_1}{\partial c}\frac{\partial z_1}{\partial b}}{D_1}\, dx_1,$$

wo

$$D_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a} & \frac{\partial x_1}{\partial b} & \frac{\partial x_1}{\partial c} \\ \frac{\partial y_1}{\partial a} & \frac{\partial y_1}{\partial b} & \frac{\partial y_1}{\partial c} \\ \frac{\partial z_1}{\partial a} & \frac{\partial z_1}{\partial b} & \frac{\partial z_1}{\partial c} \end{vmatrix} \quad \text{ist.}$$

Denkt man sich nun die Integration nach x_1 beziehentlich a ausgeführt, so behält man nur noch die Variabeln b, c und y_1, z_1. Man erhält also

$$dy_1 = \frac{\partial y_1}{\partial b} db + \frac{\partial y_1}{\partial c} d_c$$

$$0 = \frac{\partial z_1}{\partial b} db + \frac{\partial z_1}{\partial c} dc$$

und hieraus

$$db = \frac{\frac{\partial z_1}{\partial c}}{\frac{\partial y_1}{\partial b}\frac{\partial z_1}{\partial c} - \frac{\partial y_1}{\partial c}\frac{\partial z_1}{\partial b}} dy_1$$

und schliesslich

$$dz_1 = \frac{\partial z_1}{\partial c} dc.$$

Also wird

$$da\,db\,dc = \frac{dx_1\,dy_1\,dz_1}{D_1}.$$

Setzen wir nun in derselben Weise $dx\,dy\,dz = \frac{dx_1\,dy_1\,dz_1}{D_2}$

$$x_1 - x = \delta x_1 \qquad y_1 - y = \delta y_1 \qquad z_1 - z = \delta z_1,$$

so wird

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = 1 + \frac{\partial \delta x_1}{\partial x} \qquad \frac{\partial y_1}{\partial y} = 1 + \frac{\partial \delta y_1}{\partial y} \qquad \frac{\partial z_1}{\partial z} = 1 + \frac{\partial \delta z_1}{\partial z};$$

da die δx_1, δy_1, δz_1 unendlich klein sind, so ist

$$D_2 = 1 + \frac{\partial \delta x_1}{\partial x} + \frac{\partial \delta y_1}{\partial y} + \frac{\partial \delta z_1}{\partial z}.$$

Nun seien x, y, z Functionen von a, b, c und t; x_1, y_1, z_1 dieselben Functionen von a, b, c und $t + dt$, so ist

$$\delta x_1 = \frac{\partial x_1}{\partial t} dt.$$

Wir haben dann

$$dx_1\, dy_1\, dz_1 = D_1\, da\, db\, dc$$
$$dx\;\, dy\;\, dz\; = D\;\, da\, db\, dc,$$

wo D die Determinante für die x, y, z ist.

Andererseits ist

$$D_1 = D + \frac{\partial D}{\partial t}\, dt.$$

Da nun

$$dx\, dy\, dz = \frac{D}{D_1}\, dx_1\, dy_1\, dz_1$$

und

$$D_2 = \frac{D_1}{D} \text{ nach dem Früheren ist,}$$

so folgt $$D_2 = 1 + \frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial t}\, dt = 1 + \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}$$
$$= 1 + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) dt + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) dt + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) dt.$$

Da nun

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = v \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = w \quad \text{sind,}$$

so wird

$$\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Hier sind die Geschwindigkeiten als Functionen von x, y, z, t anzusehen. Dann haben wir zu setzen

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}$$

und sprechen damit aus, dass wir die Coordinaten x, y, z auf ein bestimmtes Flüssigkeitstheilchen beziehen. Dann haben wir auch $\frac{dD}{dt}$ zu schreiben.

Dagegen ist

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w,$$

weil die Geschwindigkeit in der Weise, wie wir sie hier ausdrücken, sich auf einen bestimmten Ort bezieht und sich erstens der Zeit nach, dann aber auch dadurch ändert, dass das Flüssigkeitstheilchen während der Bewegung den Ort wechselt.

Für die Gleichung der Continuität können wir demnach auch schreiben, da ebenso

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x} u + \frac{\partial s}{\partial y} v + \frac{\partial s}{\partial z} w \quad \text{ist,}$$

$$\frac{ds}{dt} + s\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

oder

$$0 = \frac{ds}{dt} + \frac{s}{D}\frac{dD}{dt}$$

$$0 = \frac{d}{dt}(sD). \tag{31}$$

§ 5.

Die Transformation von Clebsch.

Wir kehren nun zu den allgemeinen Gleichungen 27) zurück. Da die Dichtigkeit der Flüssigkeiten immer eine Function des Druckes ist, so können wir setzen

$$P = \int \frac{dp}{s}, \tag{32}$$

also

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Eine erhebliche Vereinfachung tritt ein, wenn die Dichtigkeit als constant angesehen werden kann, wie es bei den tropfbaren Flüssigkeiten mit grosser Annäherung der Fall ist. Dann ist die Continuitätsgleichung einfach

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Eine weitere sehr erhebliche Vereinfachung bringt die Vernachlässigung der Reibung mit sich.

Die äusseren Kräfte werden in weitaus den meisten Fällen ein Potential haben. Ausnahmen kommen vor, wenn magnetische Kräfte auf Flüssigkeiten wirken, die von elektrischen Strömen durchflossen sind, und bei nicht conservativen Wirkungen, wie Reibung und Erwärmung.

Setzen wir in der Gleichung 27)

$$k^2 = 0 \quad \text{und} \quad X = \frac{\partial V}{\partial x} \qquad Y = \frac{\partial V}{\partial y} \qquad Z = \frac{\partial V}{\partial z},$$

so kann man das allgemeine Integral der Gleichungen für den Druck p bilden, wenn man setzt

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \chi \frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \chi \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \chi \frac{\partial \psi}{\partial z} \tag{33}$$

und erhält dann zwei Bedingungsgleichungen für φ, χ, ψ.

Wir setzen nun

$$V - P = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \chi \frac{\partial \psi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \tag{34}$$

und erhalten

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\, \partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\chi \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\, \partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\chi \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \chi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \chi \frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \chi \frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2\right].$$

Setzt man dagegen die Ausdrücke für u, v, w in die ersten Gleichungen, so erhält man

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\, \partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\chi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \chi \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)$$

$$+ \frac{\chi^2}{2} \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2\right\} + \chi \frac{\partial \psi}{\partial x}\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)$$

$$+ \frac{\partial \psi}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \chi}{\partial z}\right).$$

Beide Gleichungen stimmen überein, wenn

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \chi}{\partial z} + \chi\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = 0$$

und

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z} + \chi\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2\right] = 0 \text{ sind.}$$

Hierzu kommt die Gleichung der Continuität

$$\left(\varDelta \varphi + \chi \varDelta \psi + \frac{\partial \chi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) s$$

$$+ \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \chi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial s}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \chi \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial s}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \chi \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = 0.$$

Die beiden ersten Gleichungen erhält man auch, wenn man die zweite und dritte der Bewegungsgleichungen in derselben Weise behandelt.

Multiplicirt man die zweite Bedingungsgleichung mit χ, so lässt sich die Gleichung für den Druck schreiben:

$$
\begin{aligned}
V-P=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] \\
-\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right\}\chi^2.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Bilden wir die Drehungsgeschwindigkeiten ξ, η, ζ der Flüssigkeitstheilchen, so ist

$$
\begin{aligned}
2\xi &= \frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\chi}{\partial z} \\
2\eta &= \frac{\partial\chi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\chi}{\partial x} \\
2\zeta &= \frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

Die Function φ ist hier ganz fortgefallen. Sie giebt nur den Antheil der rein fortströmenden Bewegung ohne Drehung. Dagegen rührt die Drehungsgeschwindigkeit von den Functionen χ und ψ her.

Wenn keine Drehung vorhanden ist, also ψ und χ fortfallen, sind die Bedingungsgleichungen von selbst erfüllt und wir haben dann aus der Continuitätsgleichung die eine Bedingung

$$
\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(s\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(s\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(s\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=0.
$$

§ 6.

Uebertragung bekannter Bewegungen auf geometrisch ähnliche Formen.

Aus den allgemeinen Gleichungen lassen sich Schlüsse ziehen in Bezug auf die Veränderungen, welche ein hydrodynamisches Problem durch Verschiedenheit der Dimensionen erleidet.

Nehmen wir an, ein bestimmtes Problem sei für eine Flüssigkeit und für vorgeschriebene Dimensionen gelöst. Wir setzen nun für eine andere Flüssigkeit, indem wir mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ drei Constanten bezeichnen

$$
\begin{aligned}
&k_1{}^2=\varepsilon_1 k^2 \quad s_1=\varepsilon_2 s \quad u_1=\varepsilon_3 u \quad v_1=\varepsilon_3 v \quad w_1=\varepsilon_3 w \\
&x_1=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2\varepsilon_3}x \quad y_1=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2\varepsilon_3}y \quad z_1=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2\varepsilon_3}z \\
&p_1=\varepsilon_3^2\varepsilon_2 p \qquad t_1=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2\varepsilon_3^2},
\end{aligned}
$$

und setzen diese Werthe in die Gleichungen 27) ein, wenn wir die äusseren Kräfte Null setzen. Wir erhalten dann dieselben Gleichungen wie für die erste Flüssigkeit, indem bei den drei ersten der gemeinschaftliche Factor $\frac{\varepsilon_3^3\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1}$ heraustritt, bei der vierten der Factor $\frac{\varepsilon_2^2\varepsilon_3^2}{\varepsilon_1}$. Jede für die eine Flüssigkeit gefundene Lösung gilt also auch für die zweite.

Die Constanten ε_1 und ε_2 sind durch die Natur der zweiten Flüssigkeit bestimmt, die dritte ε_3 ist willkürlich.

Für compressive Flüssigkeiten kommt noch die Beziehung zwischen Druck und Dichtigkeit hinzu. Beschränkt man sich auf geringe Dichtigkeitsveränderungen, so ist

$$dp = a^2\,ds,$$

wo a eine Constante bezeichnet (die Schallgeschwindigkeit in der Flüssigkeit). Hierdurch wird dann die Constante ε_3 bestimmt, indem für die zweite Flüssigkeit

$$a_1^2 = a^2\,\varepsilon_3^2 \text{ sein muss.}$$

Es müssen sich also alle Geschwindigkeiten ebenso ändern wie die Schallgeschwindigkeiten, wenn eine Uebertragung der Lösungen möglich sein soll.

Bei incompressibeln Flüssigkeiten fällt diese Beziehung fort. Dafür tritt eine andere hinzu, wenn eine freie Oberfläche vorhanden und die Schwere wirksam ist.

In diesem Fall muss der gemeinsame Factor $\frac{\varepsilon_3^3\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1} = 1$ sein.

Dann können den Gleichungen auch noch beliebige unveränderliche äussere Kräfte hinzugefügt werden.

Aus diesen Betrachtungen lässt sich noch folgern, dass in grossen Räumen der Einfluss der Compressibilität der Flüssigkeiten geringer wird. Aus der Gleichung

$$dp = a^2\,ds$$

folgt nämlich, dass grösseren Werthen von $\frac{ds}{dp}$, nämlich der Compressibilität, kleinere Werthe der Schallgeschwindigkeit entsprechen. Verkleinern wir also die Constante ε_3, d. h. vergrössern wir die Dimensionen des Raumes, so verkleinern wir die Schallgeschwindigkeit nach dem Früheren und vergrössern die Compressibilität, wenn die Vorgänge analog ablaufen sollen. Also hat die

grössere Compressibilität in grösseren Räumen denselben Einfluss wie eine kleinere in kleineren Räumen, und der Einfluss unveränderter Compressibilität ist in grösseren Räumen geringer. Diese Schlussfolgerung ist von der grössten Wichtigkeit für die Vorgänge in der Atmosphäre. Denn sie gestattet uns Betrachtungen, die für incompressible Flüssigkeiten angestellt sind, auch auf die Vorgänge im Luftmeere anzuwenden.

§ 7.

Mathematische Hülfssätze.

Wir wollen für die weiteren Betrachtungen einige allgemeine Sätze ableiten.

Es sei ein beliebig gestalteter, endlicher, geschlossener Raum gegeben; dS sei ein Element der Oberfläche, n die nach aussen gerichtete Normale. Wir betrachten zwei Punkte mit den Coordinaten x, y, z, x_1, y_1, z_1, von denen der erste in der Oberfläche des betrachteten Raumes liegt. Beide Punkte sollen sich mit einer Kraft anziehen, die im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung abnimmt.

Die Kraft auf den Punkt x, y, z in der Richtung n ist dann

$$N = \frac{1}{r^2} \cos r n,$$

wo $r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$ ist.

Wir bilden das Integral

$$\int d S\, N = \int \frac{d S}{r^2} \cos r n;$$

$\frac{dS}{r^2} \cos r n$ ist das Element einer mit dem Radius Eins um x_1, y_1, z_1 gelegten Kugel, das von dem das Element dS begrenzenden, von x_1, y_1, z_1 ausgehenden Kegel ausgeschnitten wird. Je nachdem der Kegel in den Raum ein- oder austritt, hat die Normale positive oder negative Richtung und daher ist auch $\cos rn$ positiv oder negativ.

Liegt also der Punkt x_1, y_1, z_1 ausserhalb des Raumes, so tritt der Kegel ebenso oft durch die Oberfläche aus als ein, und wir erhalten bei der Integration über die ganze Oberfläche eben-

soviel Elemente der Kugelfläche mit positivem als mit negativem Vorzeichen. Also ist in diesem Falle der Gesammtwerth Null.

Wenn dagegen der Punkt x_1, y_1, z_1 innerhalb des betrachteten Raumes liegt, so tritt der Kegel einmal öfter aus als ein.

Der Kegel muss aber immer irgendwo die Oberfläche durchschneiden. Man hat also die ganze Kugeloberfläche bei der Integration

$$\int \frac{1}{r^2} \cos rn \, dS = 4\pi .$$

Denken wir uns jetzt den betrachteten Raum mit Masse erfüllt und bezeichnen ein Massenelement mit $dm = s\, dx_1\, dy_1\, dz_1$, so ist

$$\mathfrak{B} = \int \frac{dm}{r} \tag{36}$$

eine Function, deren negative partielle Ableitungen nach den Coordinaten die Componenten der anziehenden Kräfte aller Massenelemente auf den Punkt x, y, z ergiebt. Denn es ist

$$- \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} = + \int \frac{dm\,(x - x_1)}{r^3} = \int \frac{dm}{r^2} \cos rx$$

$$- \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} = \int \frac{dm}{r^2} \cos ry$$

$$- \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} = \int \frac{dm}{r^2} \cos rz .$$

Ebenso ist

$$- \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial n} = \int \frac{dm}{r^2} \frac{dr}{dn} = \int \frac{dm}{r^2} \cos rn = N,$$

wenn wir unter N die Summe der Kräfte auf den Punkt x, y, z parallel n verstehen. Bilden wir jetzt

$$\int N\, dS = \int \int \frac{dS\, dm}{r^2} \cos rn,$$

so ist wieder
$$\int \frac{1}{r^2}\, dS \cos rn = 4\pi,$$

also
$$\int N dS = 4\pi \int dm = 4\pi M,$$

wenn wir mit M die Gesammtmasse bezeichnen.

Wir betrachten jetzt ein rechtwinkliges Parallelepipedon mit den Kanten dx, dy, dz. Für die Seitenflächen parallel der yz-Ebene mit der Coordinate x ist

$$N_x = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial n} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x},$$

für die mit der Coordinate $x + dx$ ist

$$N_{x+dx} = -\left[\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x}\right) dx\right].$$

Wenn wir nun das $\int N\, dS$ über die Oberfläche des Parallelepipedons, deren Fläche $dz\, dy$ beträgt, erstrecken, so liefern diese beiden Seiten zusammen

$$-\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x^2}\, dx\, dy\, dz\,.$$

Ebenso erhalten wir von den anderen Seitenflächen

$$-\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial y^2}\, dx\, dy\, dz \text{ und } -\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial z^2}\, dx\, dy\, dz.$$

Demnach ist nach dem Vorigen

$$\Delta \mathfrak{B}\, dx\, dy\, dz = -4\pi M = -4\pi s\, dx\, dy\, dz$$

und

$$\Delta \mathfrak{B} = -4\pi s, \tag{37}$$

überall, wo $s = 0$, ist auch

$$\Delta \mathfrak{B} = 0.$$

Es lässt sich leicht nachweisen, dass die Potentialfunction $\mathfrak{B}$ mit ihren ersten Differentialquotienten überall stetig ist, auch wenn der Punkt x, y, z im Innern der anziehenden Masse liegt. Führen wir Polarcoordinaten ein und setzen

$$\begin{aligned} x' &= x + r \sin \vartheta \cos \Theta \\ y' &= y + r \sin \vartheta \sin \Theta \\ z' &= z + r \cos \vartheta \qquad , \end{aligned}$$

so sind Θ und ϑ die geographische Länge und Breite auf einer um x, y, z gelegten Kugeloberfläche mit dem Radius r. Auf der Fläche wählen wir vier Punkte mit den Winkelcoordinaten ϑ, Θ; $\vartheta + d\vartheta$, Θ; ϑ, $\Theta + d\vartheta$; $\vartheta + d\vartheta$, $\Theta + d\Theta$. Werden die Punkte

durch kürzeste Linien verbunden, so erhalten wir ein Flächenelement

$$r\,d\vartheta\,.\,r\sin\vartheta\,d\Theta.$$

Legen wir nun eine zweite Kugelfläche im Abstande dr von der ersten, und verbinden die gewählten Grenzen des Flächenelements durch radiale Strahlen mit dem Mittelpunkte, so erhalten wir ein Raumelement

$$r\,d\vartheta\,.\,r\sin\vartheta\,d\Theta\,.\,dr.$$

Also wird

$$\mathfrak{B}=\int\!\!\int\!\!\int\frac{s\,dx'\,dy'\,dz'}{r}=\int\!\!\int\!\!\int s\,r\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\Theta\,dr.$$

Hieraus geht hervor, dass der Beitrag des Raumelements, in welchem der Punkt x, y, z liegt, Null ist, weil dann r verschwindet. Deshalb ist $\mathfrak{B}$ überall endlich und stetig.

Andererseits ist

$$\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x}=-\int\!\!\int\!\!\int\frac{s\,dx'\,dy'\,dz'\,(x-x')}{r^3}$$

$$\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial y}=-\int\!\!\int\!\!\int\frac{s\,dx'\,dy'\,dz'\,(y-y')}{r^3}$$

$$\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial z}=-\int\!\!\int\!\!\int\frac{s\,dx'\,dy'\,dz'\,(z-z')}{r^3}$$

oder

$$\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x}=\int\!\!\int\!\!\int s\cos\Theta\sin^2\vartheta\,d\Theta\,d\vartheta\,dr$$

$$\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial y}=\int\!\!\int\!\!\int s\sin\Theta\sin^2\vartheta\,d\Theta\,d\vartheta\,dr$$

$$\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial z}=\int\!\!\int\!\!\int s\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\Theta\,d\vartheta\,dr.$$

Die Integrale bleiben also ebenfalls endlich, wenn der Punkt x, y, z ins Innere der anziehenden Masse rückt.

Wir können auch schreiben

$$\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x}=-\int\!\!\int\!\!\int dx'\,dy'\,dz'\,s\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}$$

$$=-\int\!\!\int\!\!\int dx'\,dy'\,dz'\,\frac{\partial\left(\frac{s}{r}\right)}{\partial x'}+\int\!\!\int\!\!\int\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r}\,\frac{\partial s}{\partial x'},$$

oder bei partieller Integration über die Oberfläche des mit Masse erfüllten Raumes

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} = -\int dS \frac{s}{r} \cos nx + \iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r} \frac{\partial s}{\partial x'}. \qquad 38)$$

Der Differentialquotient von $\mathfrak{B}$ ist hier dargestellt als zusammengesetzt aus den Potentialfunctionen einer in dem Raum mit der Dichtigkeit $\frac{\partial s}{\partial x'}$ vertheilten Masse und einer über die Oberfläche mit der Dichtigkeit s verbreiteten Masse.

In derselben Weise folgt

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} = -\int dS \frac{s}{r} \cos ny + \iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r} \frac{\partial s}{\partial y'}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} = -\int dS \frac{s}{r} \cos nz + \iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r} \frac{\partial s}{\partial z'}.$$

Nehmen wir als einen Theil der Oberfläche die yz-Ebene an, so dass dort $\cos nx = 1$, $\cos ny = 0$, $\cos nz = 0$ ist.

Nach Gleichung 37) und 38) ist dann

$$\Delta \mathfrak{B} = -4\pi s = -\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{dS\,s}{r} + \frac{\partial \mathfrak{B}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_3}{\partial z},$$

wenn wir

$$\mathfrak{B}_1 = \iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r} \frac{\partial s}{\partial x'} \quad \mathfrak{B}_2 = \iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r} \frac{\partial s}{\partial y'}$$

$$\mathfrak{B}_3 = \iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r} \frac{\partial s}{\partial z'}$$

setzen.

Wir haben nun gesehen, dass die Potentialfunctionen von der Form der $\mathfrak{B}$ überall stetig sind. An der Oberfläche des mit Masse erfüllten Raumes ist s unstetig, indem es von dem Werthe Null beim Hindurchgehen durch die Oberfläche plötzlich einen endlichen Werth annimmt. Es ist erstens $\Delta \mathfrak{B}$ unstetig, dann aber auch

$$-\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{dS\,s}{r}.$$

Dass überall, wo $s = 0$ ist, die Gleichung $\Delta \mathfrak{B} = 0$ thatsächlich erfüllt ist, folgt daraus, dass $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ ist.

Wir denken uns jetzt eine Oberfläche beiderseits mit Masse von entgegengesetzten Vorzeichen belegt (z. B. positiver und negativer Elektricität), und zwar sollen die Dichtigkeiten beider überall gleich sein. Die Potentialfunction der einen Massenbelegung würde

$$\int \frac{dS\, s}{r}$$

sein, die der zweiten, die sich in unendlich nahem Abstande dn befindet

$$-\int \frac{dS\, s}{r} - \int s \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS\, dn\,;$$

mit $\sigma = s\, dn$ bezeichnen wir die Dichtigkeit der Doppelschicht und nehmen sie als endlich an; die Dichtigkeit s jeder Schicht ist dann unendlich gross.

Die Potentialfunction der Doppelschicht ist also

$$\mathfrak{W} = -\int \sigma\, dS \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}. \tag{39}$$

Nun ist $\quad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{1}{r^2}\cos rn;$

$dS \cos rn$ ist die Projection von dS auf eine Kugel, die um den Punkt x, y, z mit dem Radius r durch den Punkt x', y', z' gelegt ist. $\frac{dS \cos rn}{r^2}$ ist das entsprechende Flächenelement auf einer Kugel mit dem Radius Eins, oder die Grösse, in welcher das Flächenelement einem in x, y, z befindlichen Auge erscheint.

An einer Seite der Fläche wird der Cosinus dasselbe Vorzeichen haben, wenn die nach der Fläche vom Punkte x, y, z gezogenen Linien die Fläche nur einmal schneiden. Schneiden sie die Fläche öfter, so kann man sie in einzelne Stücke zerlegen, die nur einmal geschnitten werden, und die Betrachtung auf die einzelnen Stücke anwenden. Auf der anderen Seite hat dann der Cosinus das entgegengesetzte Vorzeichen. Es ist daher

$$\mathfrak{W} = \pm \int \sigma\, d\omega,$$

wenn wir mit $d\omega$ das Element der Kugel mit dem Radius Eins bezeichnen. Geht man mit dem Punkte x, y, z unendlich nahe an die Fläche heran, so ist die scheinbare Grösse eines unendlich

kleinen Stückes der Fläche die Halbkugel, auf diesem Stück kann man σ als constant betrachten und erhält

$$\mathfrak{W} = + 2\pi\sigma.$$

Geht man also in der Richtung der Normale durch die Fläche hindurch, so ändert $\mathfrak{W}$ seinen Werth um $4\pi\sigma$, weil man einmal in der Richtung der Normale der einen Fläche und in der entgegengesetzten der zweiten Fläche fortschreitet.

Das Flächenstück, das in dem Punkte x, y, z als Halbkugel erscheint, nehmen wir als Kreisfläche mit dem Radius R an und legen den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt, den Punkt x, y, z in die z-Axe. Beim Hindurchgehen durch die Fläche rückt also dieser Punkt in der z-Axe vor. Gleichzeitig ist z dann die Normale. Also ist

$$\mathfrak{W} = -\sigma \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dS = 2\pi \int_0^R \frac{\varrho\, d\varrho}{(\sqrt{\varrho^2 + z^2})^3},$$

wo $\varrho^2 = x^2 + y^2$ ist. Hieraus folgt

$$\mathfrak{W} = 2\pi\sigma \left(\frac{z}{\sqrt{z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right).$$

Für unendlich kleine z ist bei negativem z

$$\mathfrak{W} = -2\pi\sigma,$$

bei positivem

$$\mathfrak{W} = +2\pi\sigma,$$

was mit dem schon Gefundenen übereinstimmt. Dagegen ist

$$\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} = -\frac{2\pi\sigma R^2}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3},$$

also für unendlich kleines z

$$= -\frac{2\pi\sigma}{R}.$$

Der Differentialquotient ist also endlich und stetig.

Wir gehen nun zur Ableitung des zuerst von Green aufgestellten, für die Hydrodynamik sehr wichtigen Satzes über.

Aus den identischen Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial V}{\partial y}\right)=\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+U\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(U\frac{\partial V}{\partial z}\right)=\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}+U\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

folgt durch Integration über einen geschlossenen Raum

$$\begin{aligned}\iiint dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)\\
=-\iiint dx\,dy\,dz\;U\Delta V+\iint U\frac{\partial V}{\partial x}\,dz\,dy\\
+\iint dx\,dz\;U\frac{\partial V}{\partial y}+\iint dy\,dx\;U\frac{\partial V}{\partial z}.\end{aligned}\tag{40a}$$

Nun ist

$$dz\,dy=dS\cos nx\qquad dz\,dx=dS\cos ny\qquad dx\,dy=dS\cos nz,$$

da $dx\,dy$ u. s. w. die Projectionen von dS sind. Andererseits ist

$$\cos nx=\frac{\partial x}{\partial n},\qquad \cos ny=\frac{\partial y}{\partial n},\qquad \cos nz=\frac{\partial z}{\partial n}.$$

Die drei letzten Integrale geben also zusammen

$$\int dS\,U\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}\right)=\int dS\,U\frac{\partial V}{\partial n}.$$

Durch Vertauschung von U, V wird die linke Seite der Gleichung nicht verändert, also muss auch sein

$$\begin{aligned}\iiint U\Delta V\,dx\,dy\,dz-\int dS\,U\frac{\partial V}{\partial n}=\iiint V\Delta U\,dx\,dy\,dz\\
-\int dS\,V\frac{\partial U}{\partial n}.\end{aligned}\tag{40b}$$

Dies ist der zuerst von Green aufgestellte allgemeine Satz. Genügen die Functionen U und V den Gleichungen

$$\Delta U=0\quad\text{und}\quad\Delta V=0,$$

so ist

$$\int dS\left(U\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial U}{\partial n}\right)=0.$$

Das Integral

$$\iiint dx\,dy\,dz\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}$$

muss, da es aus lauter positiven Werthen besteht, einen kleinsten Werth annehmen. Die Möglichkeit, dass hierin eine Unbestimmtheit liegt, diese Annahme demnach als Grundlage für den folgenden Satz nicht streng ist, bezieht sich auf Fälle, die keine physikalische Bedeutung haben. Da der Satz aber sich auch in ganz strenger Weise ableiten lässt, wird es für unsere Zwecke genügen, den älteren von Direchlet herrührenden Beweis zu benutzen.

Wir setzen $\varphi = \varphi_1 + h\varphi_2$ und bezeichnen mit φ_1 den Werth von φ, für den die Summe der Quadrate den kleinsten Werth annimmt, und mit h eine Constante.

Man hat dann

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)^2$$
$$+ 2h\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right)$$
$$+ h^2\left[\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right)^2\right].$$

Wenn $\varDelta\varphi_1 = 0$ ist und der Werth von φ ist an der Oberfläche vorgeschrieben, so muss dort $\varphi_2 = 0$ sein, weil auch φ_1, der kleinste Werth von φ, diesen Werth an der Oberfläche annehmen muss. Dann ist also nach 40a)

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0.$$

Dies ist aber die Bedingung des Minimums. Denn sonst könnte man das Glied

$$2h\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right)$$

durch passende Wahl von h negativ und grösser als das folgende Glied werden lassen und dann würde

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 < \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)^2$$

sein, was der Voraussetzung widerspricht.

Die Bedingung

$$0 = \delta\int\int\int dx\,dy\,dz\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right]$$

ist daher gleichbedeutend mit der Gleichung

$$\varDelta\varphi_1 = 0 \text{ und } \varphi = \varphi_1$$

sowie vorgeschriebenen Werthen an der Oberfläche. Dieser Satz leistet für die von Jacobi herrührende Transformation orthogonaler Coordinaten wichtige Dienste, wenn wir von einem System x, y, z zu einem anderen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ übergehen.

Wir setzen

$$\mathfrak{U}^2 = \left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial z}\right)^2 \quad \mathfrak{V}^2 = \left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z}\right)^2 \qquad 41)$$

$$\mathfrak{W}^2 = \left(\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z}\right)^2,$$

so werden

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x}\frac{1}{\mathfrak{U}}, \quad \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial y}\frac{1}{\mathfrak{U}}, \quad \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial z}\frac{1}{\mathfrak{U}}$$

die Cosinus der Winkel, welche die auf der Fläche $\mathfrak{u} = \text{const}$ errichtete Normale mit den Coordinataxen x, y, z bildet. Dieselbe Bedeutung haben $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x}\frac{1}{\mathfrak{V}}$ u. s. w.

Es ist also

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial y}\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial z}\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z}\right)\frac{1}{\mathfrak{U}\mathfrak{V}} = \cos \mathfrak{u}\mathfrak{v},$$

wenn wir mit $\mathfrak{u}\mathfrak{v}$ den Winkel bezeichnen, den die Normalen mit einander bilden. Schneiden sie sich senkrecht, so ist $\cos \mathfrak{u}\mathfrak{v} = 0$. Also

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial y}\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial z}\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z} = 0.$$

Schneiden sich die Flächen $\mathfrak{u} = \text{const}$, $\mathfrak{v} = \text{const}$, $\mathfrak{w} = \text{const}$ gegenseitig senkrecht, so kommen noch zwei Gleichungen hinzu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y}\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z}\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y}\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z}\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \qquad 42)$$

Durch den Schnittpunkt der Flächen wird im allgemeinen ein Punkt fest bestimmt. Denken wir uns einen zweiten, unendlich nahe gelegenen Punkt, so wird dieser bestimmt, wenn man sich die Flächen in der Richtung ihrer Normalen verschoben denkt. Die Projectionen dieser Verschiebungen auf die Richtungen der Normalen sind, wenn dx, dy, dz die Projectionen auf die Axen x, y, z bezeichnen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x}\frac{dx}{\mathfrak{U}} + \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial y}\frac{dy}{\mathfrak{U}} + \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial z}\frac{dz}{\mathfrak{U}} &= \frac{d\mathfrak{u}}{\mathfrak{U}} \\
\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x}\frac{dx}{\mathfrak{V}} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y}\frac{dy}{\mathfrak{V}} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z}\frac{dz}{\mathfrak{V}} &= \frac{d\mathfrak{v}}{\mathfrak{V}} \\
\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x}\frac{dx}{\mathfrak{W}} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y}\frac{dy}{\mathfrak{W}} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z}\frac{dz}{\mathfrak{W}} &= \frac{d\mathfrak{w}}{\mathfrak{W}}.
\end{aligned} \qquad 43)$$

Die Entfernung beider Punkte ist also

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\frac{d\mathfrak{u}}{\mathfrak{U}}\right)^2 + \left(\frac{d\mathfrak{v}}{\mathfrak{V}}\right)^2 + \left(\frac{d\mathfrak{w}}{\mathfrak{W}}\right)^2 \qquad 44)$$

und das Volumelement

$$\frac{d\mathfrak{u}\, d\mathfrak{v}\, d\mathfrak{w}}{\mathfrak{U}\,\mathfrak{V}\,\mathfrak{W}}. \qquad 45)$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
dx &= \mathfrak{U}\frac{\partial x}{\partial \mathfrak{u}}\frac{d\mathfrak{u}}{\mathfrak{U}} + \mathfrak{V}\frac{\partial x}{\partial \mathfrak{v}}\frac{d\mathfrak{v}}{\mathfrak{V}} + \mathfrak{W}\frac{\partial x}{\partial \mathfrak{w}}\frac{d\mathfrak{w}}{\mathfrak{W}} \\
dy &= \mathfrak{U}\frac{\partial y}{\partial \mathfrak{u}}\frac{d\mathfrak{u}}{\mathfrak{U}} + \mathfrak{V}\frac{\partial y}{\partial \mathfrak{v}}\frac{d\mathfrak{v}}{\mathfrak{V}} + \mathfrak{W}\frac{\partial y}{\partial \mathfrak{w}}\frac{d\mathfrak{w}}{\mathfrak{W}} \\
dz &= \mathfrak{U}\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{u}}\frac{d\mathfrak{u}}{\mathfrak{U}} + \mathfrak{V}\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{v}}\frac{d\mathfrak{v}}{\mathfrak{V}} + \mathfrak{W}\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{w}}\frac{d\mathfrak{w}}{\mathfrak{W}}.
\end{aligned} \qquad 46)$$

$\mathfrak{U}\frac{\partial x}{\partial \mathfrak{u}}$, $\mathfrak{U}\frac{\partial y}{\partial \mathfrak{u}}$, $\mathfrak{U}\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{u}}$ sind daher die Cosinus der Winkel, welche die x, y, z mit der Normale von $\mathfrak{u}$ bilden. Dasselbe gilt von den anderen. Dieselben Cosinus waren $\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x}\frac{1}{\mathfrak{U}}$ u. s. w.

Wir haben also

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} &= \mathfrak{U}^2\frac{\partial x}{\partial \mathfrak{u}} & \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial y} &= \mathfrak{U}^2\frac{\partial y}{\partial \mathfrak{u}} & \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial z} &= \mathfrak{U}^2\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{u}} \\
\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x} &= \mathfrak{V}^2\frac{\partial x}{\partial \mathfrak{v}} & \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} &= \mathfrak{V}^2\frac{\partial y}{\partial \mathfrak{v}} & \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z} &= \mathfrak{V}^2\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{v}} \\
\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x} &= \mathfrak{W}^2\frac{\partial x}{\partial \mathfrak{w}} & \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} &= \mathfrak{W}^2\frac{\partial y}{\partial \mathfrak{w}} & \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} &= \mathfrak{W}^2\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{w}}.
\end{aligned} \qquad 47)$$

Hieraus ergiebt sich auch

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \mathfrak{u}}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mathfrak{u}}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{u}}\right)^2 = \frac{1}{\mathfrak{U}^2} \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial \mathfrak{v}}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mathfrak{v}}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{v}}\right)^2 = \frac{1}{\mathfrak{V}^2} \qquad 48)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \mathfrak{w}}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mathfrak{w}}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{w}}\right)^2 = \frac{1}{\mathfrak{W}^2}.$$

Quadriren wir die Gleichung 46), subtrahiren die Gleichung 44), so ergiebt sich bei Berücksichtigung von 48)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \mathfrak{u}}\frac{\partial x}{\partial \mathfrak{v}}+\frac{\partial y}{\partial \mathfrak{u}}\frac{\partial y}{\partial \mathfrak{v}}+\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{u}}\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{v}}\right)d\mathfrak{u}\,d\mathfrak{v}+\left(\frac{\partial x}{\partial \mathfrak{v}}\frac{\partial x}{\partial \mathfrak{w}}+\frac{\partial y}{\partial \mathfrak{v}}\frac{\partial y}{\partial \mathfrak{w}}+\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{v}}\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{w}}\right)d\mathfrak{v}\,d\mathfrak{w}$$
$$+\left(\frac{\partial x}{\partial \mathfrak{w}}\frac{\partial x}{\partial \mathfrak{u}}+\frac{\partial y}{\partial \mathfrak{w}}\frac{\partial y}{\partial \mathfrak{u}}+\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{w}}\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{u}}\right)d\mathfrak{w}\,d\mathfrak{u}=0. \qquad 49)$$

Da die Coefficienten von $d\mathfrak{u}\,d\mathfrak{v}$, $d\mathfrak{v}\,d\mathfrak{w}$, $d\mathfrak{w}\,d\mathfrak{u}$ einzeln verschwinden müssen, weil die $d\mathfrak{u}$, $d\mathfrak{v}$, $d\mathfrak{w}$ einzeln gleich Null sein können, so folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \mathfrak{u}}\frac{\partial x}{\partial \mathfrak{v}}+\frac{\partial y}{\partial \mathfrak{u}}\frac{\partial y}{\partial \mathfrak{v}}+\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{u}}\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{v}}&=0\\
\frac{\partial x}{\partial \mathfrak{v}}\frac{\partial x}{\partial \mathfrak{w}}+\frac{\partial y}{\partial \mathfrak{v}}\frac{\partial y}{\partial \mathfrak{w}}+\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{v}}\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{w}}&=0 \qquad 50)\\
\frac{\partial x}{\partial \mathfrak{w}}\frac{\partial x}{\partial \mathfrak{u}}+\frac{\partial y}{\partial \mathfrak{w}}\frac{\partial y}{\partial \mathfrak{u}}+\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{w}}\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{u}}&=0.
\end{aligned}$$

Nun ist auch

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x}&=\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{u}}\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{v}}\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{w}}\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x}\\
\frac{\partial \varphi}{\partial y}&=\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{u}}\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{v}}\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{w}}\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y}\\
\frac{\partial \varphi}{\partial z}&=\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{u}}\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial z}+\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{v}}\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z}+\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{w}}\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Also nach 41) und 42)

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2=\mathfrak{U}^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{u}}\right)^2+\mathfrak{V}^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{v}}\right)^2+\mathfrak{W}^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{w}}\right)^2.$$

Nun ist, wie wir gesehen haben, das Integral

$$\iiint dx\,dy\,dz\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right]$$

ein Minimum, wenn $\Delta\varphi=0$ ist und φ an der Oberfläche vorgeschriebene Werthe hat, so dass dort $\delta\varphi$ verschwindet.

Also ist bei Berücksichtigung von 45)

$$0=\delta\iiint d\mathfrak{u}\,d\mathfrak{v}\,d\mathfrak{w}\left[\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{V}\mathfrak{W}}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{u}}\right)^2+\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{W}\mathfrak{U}}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{v}}\right)^2+\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{U}\mathfrak{V}}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{w}}\right)^2\right],$$

oder

$$0=\iiint d\mathfrak{u}\,d\mathfrak{v}\,d\mathfrak{w}\left[\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{V}\mathfrak{W}}\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{u}}\frac{\partial\,\delta\varphi}{\partial \mathfrak{u}}+\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{W}\mathfrak{U}}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{v}}\frac{\partial\,\delta\varphi}{\partial \mathfrak{v}}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{U}\mathfrak{V}}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{w}}\frac{\partial\,\delta\varphi}{\partial \mathfrak{w}}\right)\right].$$

Integrirt man diese Gleichung partiell und berücksichtigt, dass $\delta\varphi$ an der Oberfläche verschwindet, so erhält man

$$0 = \int\int\int d\mathfrak{u}\, d\mathfrak{v}\, d\mathfrak{w} \left[\frac{\partial}{\partial \mathfrak{u}}\left(\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{V}\mathfrak{W}}\frac{\partial\varphi}{\partial \mathfrak{u}}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{v}}\left(\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{W}\mathfrak{U}}\frac{\partial\varphi}{\partial \mathfrak{v}}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{w}}\left(\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{U}\mathfrak{V}}\frac{\partial\varphi}{\partial \mathfrak{w}}\right)\right]\delta\varphi.$$

Diese Gleichung ist allgemein nur zu erfüllen, wenn

$$0 = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{u}}\left(\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{V}\mathfrak{W}}\frac{\partial\varphi}{\partial \mathfrak{u}}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{v}}\left(\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{W}\mathfrak{U}}\frac{\partial\varphi}{\partial \mathfrak{v}}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{w}}\left(\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{U}\mathfrak{V}}\frac{\partial\varphi}{\partial \mathfrak{w}}\right). \qquad 51)$$

Aus der Gleichung, die aus 40b) entsteht, wenn $V = 1$, $U = \varphi$ gesetzt wird

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS = \int\int\int dx\, dy\, dz\, \Delta\varphi$$
$$= \int\int\int \frac{d\mathfrak{u}\, d\mathfrak{v}\, d\mathfrak{w}}{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}} \Delta\varphi$$

und der eben abgeleiteten folgt, dass in das Parallelepipedon, das durch die Flächen $\mathfrak{u} + d\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v} + d\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w} + d\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ begrenzt wird, die Flüssigkeitsmenge tritt, die einerseits ausgedrückt wird durch

$$\left[\frac{\partial}{\partial \mathfrak{u}}\left(\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{V}\mathfrak{W}}\frac{\partial\varphi}{\partial \mathfrak{u}}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{v}}\left(\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{U}\mathfrak{W}}\frac{\partial\varphi}{\partial \mathfrak{v}}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{w}}\left(\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{U}\mathfrak{V}}\frac{\partial\varphi}{\partial \mathfrak{w}}\right)\right] d\mathfrak{u}\, d\mathfrak{v}\, d\mathfrak{w},$$

andererseits durch

$$\Delta\varphi \cdot \frac{d\mathfrak{u}\, d\mathfrak{v}\, d\mathfrak{w}}{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}},$$

so dass allgemein

$$\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}\left[\frac{\partial}{\partial \mathfrak{u}}\left(\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{V}\mathfrak{W}}\frac{\partial\varphi}{\partial \mathfrak{u}}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{v}}\left(\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{U}\mathfrak{W}}\frac{\partial\varphi}{\partial \mathfrak{v}}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{w}}\left(\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{U}\mathfrak{V}}\frac{\partial\varphi}{\partial \mathfrak{w}}\right)\right] = \Delta\varphi \text{ ist.} \qquad 52)$$

§ 8.

Elliptische Coordinaten.

Die elliptischen Coordinaten werden nun in folgender Weise definirt. Es sei die Gleichung gegeben

$$f = \frac{x^2}{a^2 + \varepsilon} + \frac{y^2}{b^2 + \varepsilon} + \frac{z^2}{c^2 + \varepsilon} - 1 = 0 \qquad a^2 > b^2 > c^2. \qquad 53)$$

Die Entfernungen der Brennpunkte dieser Fläche zweiten Grades vom Mittelpunkte sind

$$\sqrt{a^2 - b^2}, \quad \sqrt{a^2 - c^2}, \quad \sqrt{b^2 - c^2},$$

also unabhängig von ε. Alle durch Variation von ε erhaltenen Flächen haben daher gleiche Brennpunkte und heissen hiernach confocale.

Ist $$\infty > \varepsilon > -c^2,$$
so sind die Coefficienten alle positiv, wir haben es mit einem Ellipsoid zu thun.

Ist $$-c^2 > \varepsilon > -b^2,$$
so sind nur die Coefficienten von x^2 und y^2 positiv, die Fläche wird von der xy-Ebene und ihr parallelen in Ellipsen, von Ebenen, die parallel der zy- und zx-Ebene liegen, dagegen in Hyperbeln geschnitten und nur von der x- und y-Axe in reellen Punkten. Sie ist ein einschaliges Hyperboloid.

Ist $$-b^2 > \varepsilon > -a^2,$$
so wird die Fläche nur durch die x-Axe in reellen Punkten geschnitten. Sie ist ein zweischaliges Hyperboloid.

Geht ε von ∞ bis $-c^2$, so geht f von -1 bis ∞, also durch den Werth Null hindurch. Eine Wurzel der Gleichung liegt also zwischen ∞ und $-c^2$.

Geht ε von $-c^2$ bis $-b^2$, so geht f von $-\infty$ bis $+\infty$. Eine zweite Wurzel liegt zwischen $-c^2$ und $-b^2$.

Dasselbe gilt für die dritte Wurzel, die zwischen $-b^2$ und $-a^2$ liegt.

Kleiner darf ε nicht werden, weil sonst die Coordinaten imaginär werden. Jedem Punkte x, y, z entsprechen also drei Wurzeln der Gleichung $f(\varepsilon) = 0$. Sie bilden die elliptischen Coordinaten des Punktes und wir bezeichnen sie mit ε_1, ε_2, ε_3. Dabei soll
$$\begin{gathered}\infty > \varepsilon_1 > -c^2 \\ -c^2 > \varepsilon_2 > -b^2 \\ -b^2 > \varepsilon_3 > -a^2 \quad \text{sein.}\end{gathered}$$

Sind die Coordinaten x, y, z gegeben, so sind die ε_1, ε_2, ε_3 eindeutig bestimmt. Umgekehrt sind durch die ε_1, ε_2, ε_3 nur x^2, y^2, z^2 bestimmt, die Vorzeichen bleiben unbestimmt.

Nach bekannten algebraischen Regeln ist
$$f(a^2+\varepsilon)(b^2+\varepsilon)(c^2+\varepsilon) = (\varepsilon_1-\varepsilon)(\varepsilon_2-\varepsilon)(\varepsilon_3-\varepsilon). \tag{53a}$$

Setzen wir hier nach einander ε gleich $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
x^2 &= \frac{(a^2+\varepsilon_1)(a^2+\varepsilon_2)(a^2+\varepsilon_3)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} \\
y^2 &= -\frac{(b^2+\varepsilon_1)(b^2+\varepsilon_2)(b^2+\varepsilon_3)}{(b^2-c^2)(a^2-b^2)} \\
z^2 &= \frac{(c^2+\varepsilon_1)(c^2+\varepsilon_2)(c^2+\varepsilon_3)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}.
\end{aligned} \tag{54}
$$

Ferner erhalten wir

$$
\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = -f\left(\frac{1}{\varepsilon_1-\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon_2-\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon_3-\varepsilon}+\frac{1}{a^2+\varepsilon}+\frac{1}{b^2+\varepsilon}+\frac{1}{c^2+\varepsilon}\right),
$$

und hieraus, wenn wir ε nach einander gleich ε_1, ε_2, ε_3 setzen, mit Berücksichtigung von 53) und 53a)

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2}{(a^2+\varepsilon_1)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\varepsilon_1)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\varepsilon_1)^2} &= \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\varepsilon_1-\varepsilon_3)}{(a^2+\varepsilon_1)(b^2+\varepsilon_1)(c^2+\varepsilon_1)} \\
\frac{x^2}{(a^2+\varepsilon_2)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\varepsilon_2)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\varepsilon_2)^2} &= -\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_3)(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{(a^2+\varepsilon_2)(b^2+\varepsilon_2)(c^2+\varepsilon_2)} \\
\frac{x^2}{(a^2+\varepsilon_3)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\varepsilon_3)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\varepsilon_3)^2} &= \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_3)(\varepsilon_2-\varepsilon_3)}{(a^2+\varepsilon_3)(b^2+\varepsilon_3)(c^2+\varepsilon_3)}.
\end{aligned} \tag{55}
$$

Ferner ergiebt sich aus den Gleichungen 54)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \varepsilon_1} &= \tfrac{1}{2}\frac{x}{a^2+\varepsilon_1} & \frac{\partial x}{\partial \varepsilon_2} &= \tfrac{1}{2}\frac{x}{a^2+\varepsilon_2} & \frac{\partial x}{\partial \varepsilon_3} &= \tfrac{1}{2}\frac{x}{a^2+\varepsilon_3} \\
\frac{\partial y}{\partial \varepsilon_1} &= \tfrac{1}{2}\frac{y}{b^2+\varepsilon_1} & \frac{\partial y}{\partial \varepsilon_2} &= \tfrac{1}{2}\frac{y}{b^2+\varepsilon_2} & \frac{\partial y}{\partial \varepsilon_3} &= \tfrac{1}{2}\frac{y}{b^2+\varepsilon_3} \\
\frac{\partial z}{\partial \varepsilon_1} &= \tfrac{1}{2}\frac{z}{c^2+\varepsilon_1} & \frac{\partial z}{\partial \varepsilon_2} &= \tfrac{1}{2}\frac{z}{c^2+\varepsilon_2} & \frac{\partial z}{\partial \varepsilon_3} &= \tfrac{1}{2}\frac{z}{c^2+\varepsilon_3}.
\end{aligned} \tag{56}
$$

Aus den identischen Gleichungen

$f(\varepsilon_1)-f(\varepsilon_2)=0,\quad f(\varepsilon_1)-f(\varepsilon_3)=0,\quad f(\varepsilon_2)-f(\varepsilon_3)=0$ folgt

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2}{(a^2+\varepsilon_1)(a^2+\varepsilon_2)}+\frac{y^2}{(b^2+\varepsilon_1)(b^2+\varepsilon_2)}+\frac{z^2}{(c^2+\varepsilon_1)(c^2+\varepsilon_2)} &= 0 \\
\frac{x^2}{(a^2+\varepsilon_2)(a^2+\varepsilon_3)}+\frac{y^2}{(b^2+\varepsilon_2)(b^2+\varepsilon_3)}+\frac{z^2}{(c^2+\varepsilon_2)(c^2+\varepsilon_3)} &= 0 \\
\frac{x^2}{(a^2+\varepsilon_1)(a^2+\varepsilon_3)}+\frac{y^2}{(b^2+\varepsilon_1)(b^2+\varepsilon_3)}+\frac{c^2}{(c^2+\varepsilon_1)(c^2+\varepsilon_3)} &= 0.
\end{aligned} \tag{57}
$$

Aus diesen beiden Gleichungssystemen folgt, dass die Gleichungen 50) erfüllt sind, wir es also mit orthogonalen Coordinaten zu thun haben.

Für die $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ erhalten wir folgende Werthe aus 48), 55) und 56)

$$
\mathfrak{U}^2 = 4\,\frac{(a^2+\varepsilon_1)(b^2+\varepsilon_1)(c^2+\varepsilon_1)}{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\varepsilon_1-\varepsilon_3)}
$$

$$\mathfrak{V}^2 = -4\,\frac{(a^2+\varepsilon_2)(b^2+\varepsilon_2)(c^2+\varepsilon_2)}{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\varepsilon_2-\varepsilon_3)} \tag{57}$$

$$\mathfrak{W}^2 = \quad 4\,\frac{(a^2+\varepsilon_3)(b^2+\varepsilon_3)(c^2+\varepsilon_3)}{(\varepsilon_2-\varepsilon_3)(\varepsilon_1-\varepsilon_3)}.$$

Wir führen nun die drei Grössen e_1, e_2, e_3 ein, von denen die erste nur von ε_1, die zweite nur von ε_2, die dritte nur von ε_3 abhängt. Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}\left(\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{V}\mathfrak{W}}\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_1}\right) = \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{V}\mathfrak{W}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varepsilon_1^2} + \frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}\left(\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{V}\mathfrak{W}}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_1}$$

$$= \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{V}\mathfrak{W}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial e_1^2}\left(\frac{de_1}{d\varepsilon_1}\right)^2 + \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{V}\mathfrak{W}}\frac{\partial\varphi}{\partial e_1}\frac{d^2e_1}{d\varepsilon_1^2} + \frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}\left(\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{V}\mathfrak{W}}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial e_1}\frac{de_1}{d\varepsilon_1}. \tag{58}$$

Wir bestimmen e_1 durch die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}\left(\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{V}\mathfrak{W}}\frac{de_1}{d\varepsilon_1}\right) = 0, \tag{59}$$

dies ist möglich, weil

$$\frac{\mathfrak{U}^2}{\mathfrak{V}^2\mathfrak{W}^2} = -\frac{1}{4}\,\frac{(a^2+\varepsilon_1)(b^2+\varepsilon_1)(c^2+\varepsilon_1)(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2}{(a^2+\varepsilon_2)(b^2+\varepsilon_2)(c^2+\varepsilon_2)(a^2+\varepsilon_3)(b^2+\varepsilon_3)(c^2+\varepsilon_3)} \quad \text{ist.}$$

Wir erfüllen die Gleichung 59), wenn wir

$$\frac{de_1}{d\varepsilon_1} = \frac{1}{\sqrt{(a^2+\varepsilon_1)(b^2+\varepsilon_1)(c^2+\varepsilon_1)}} \tag{60}$$

setzen und erhalten entsprechende Ausdrücke für e_2 und e_3.

Die Gleichung $\Delta\varphi = 0$ wird nach 51), 58), 59)

$$\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{V}\mathfrak{W}}\left(\frac{de_1}{d\varepsilon_1}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial e_1^2} + \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{W}\mathfrak{U}}\left(\frac{de_2}{d\varepsilon_2}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial e_2^2} + \frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{U}\mathfrak{V}}\left(\frac{de_3}{d\varepsilon_3}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial e_3^2} = 0 \tag{61}$$

oder

$$\mathfrak{U}^2\left(\frac{de_1}{d\varepsilon_1}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial e_1^2} + \mathfrak{V}^2\left(\frac{de_2}{d\varepsilon_2}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial e_2^2} + \mathfrak{W}^2\left(\frac{de_3}{d\varepsilon_3}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial e_3^2} = 0.$$

Setzen wir die erhaltenen Werthe aus 57) und 60) ein, so erhalten wir schliesslich

$$(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\frac{\partial^2\varphi}{\partial e_1^2} + (\varepsilon_1-\varepsilon_3)\frac{\partial^2\varphi}{\partial e_2^2} + (\varepsilon_1-\varepsilon_2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial e_3^2} = 0.$$

Diese Umformung der Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$ ist für alle die Fälle zweckmässig, wo φ oder $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ an Flächen zweiten Grades constante Werthe annehmen soll. Diese Flächen zweiten Grades gehen für die Grenzwerthe der elliptischen Coordinaten in folgende über.

Für $\varepsilon_1 = +\infty$, so stellt die Gleichung eine Kugel mit dem Radius $\sqrt{\varepsilon_1}$ dar. Nähert sich ε_1 dem Werth $-c^2$, so ist

$$z^2 = 0 \qquad \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} \leqq 1. \tag{62}$$

Dies ist das ebene Flächenstück, das in der xy-Ebene von der Ellipse mit den Halbaxen $\sqrt{a^2 - c^2}$ und $\sqrt{b^2 - c^2}$ von aussen begrenzt wird. Entfernt sich ε_1 vom Werthe $-c^2$ in negativer Richtung, so ist

$$z^2 = 0 \qquad \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} \geqq 1. \tag{63}$$

Hierdurch wird das ebene Flächenstück dargestellt, welches von derselben Ellipse von innen begrenzt wird. Beide zusammen stellen die ganze xy-Ebene dar. In die innere Fläche der Ellipse degenerirt das Ellipsoid, in die äussere das einschalige Hyperboloid der elliptischen Coordinaten.

Die xz-Ebene entsteht durch Abflachen des einschaligen Hyperboloids innerhalb der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1$ und durch Abflachen des zweischaligen Hyperboloids ausserhalb derselben. Endlich entsteht die yz-Ebene durch Erweiterung des zweischaligen Hyperboloids.

§ 9.

Ringcoordinaten.

Diese von Riemann eingeführten Coordinaten erhält man durch die Gleichungen

$$x = \varrho \cos \vartheta \qquad y = \varrho \sin \vartheta$$

$$\varrho = b \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + 2\varepsilon \cos \lambda + \varepsilon^2} \qquad z = -b \frac{2\varepsilon \sin \lambda}{1 + 2\varepsilon \cos \lambda + \varepsilon^2}, \tag{64}$$

die auch durch die Gleichung

$$\varrho + zi = b \frac{1 - \varepsilon e^{\lambda i}}{1 + \varepsilon e^{\lambda i}}$$

ersetzt werden können; b ist constant. Eliminirt man λ, so erhält man

$$\varrho^2 + z^2 - 2b\varrho \frac{1 + \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} + b^2 = 0.$$

Die Curven $\varepsilon = \text{const}$ sind hiernach Kreise, die in der Entfernung $\pm b \frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$ vom Anfangspunkte der Coordinaten auf der ϱ-Axe mit dem Radius

$$\pm \frac{2b\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$$

geschlagen sind. Die beiden Kreise, die den Durchschnitt der $z\varrho$-Ebene mit dem Ringe bilden, haben die Gleichungen

$$(\varrho + a)^2 + z^2 = R^2$$
$$(\varrho - a)^2 + z^2 = R^2.$$

Der erste Kreis liegt im Abstande $-a$, der zweite im Abstande $+a$ vom Nullpunkt. Wir haben für den ersten

$$-a = b\frac{\varepsilon^2+1}{\varepsilon^2-1} \qquad R = \frac{2b\varepsilon}{\varepsilon^2-1} \qquad \varepsilon > 1$$

$$\text{oder } \varepsilon^2 = \frac{a+b}{a-b},\ b = \sqrt{a^2 - R^2} \qquad R = \sqrt{a^2-b^2}, \tag{65}$$

für den zweiten

$$a = b\frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \qquad R = \frac{2b\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \qquad \varepsilon < 1$$

$$\varepsilon^2 = \frac{a-b}{a+b} \qquad R = \sqrt{a^2-b^2}.$$

Da wir den ganzen Raum durch Umdrehen der Halbebene erhalten, ist entweder $\varepsilon > 1$ oder $\varepsilon < 1$ zu wählen, so dass also thatsächlich die Radien der beiden Kreise gleich sind.

Ist $\varepsilon = 1$, so ist die Entfernung des Mittelpunktes des zugehörigen Kreises unendlich.

Ist $\varepsilon = \infty$, so ist $z = 0$, $\varrho = -b$; dieser Kreis hat sich in einen Punkt zusammengezogen.

Geht also ε von 1 bis ∞, so erhalten wir auf der Seite der negativen ϱ ein System von Kreisen, deren Mittelpunkte auf der ϱ-Axe liegen und der z-Axe immer näher rücken. Gleichzeitig wird ihr Radius immer kleiner.

Ist $\varepsilon < 1$, so wird ϱ positiv; für $\varepsilon = 0$ wird $\varrho = b$, $z = 0$. Geht ε von 0 bis 1, so erhalten wir auf der Seite der positiven ϱ ein System von Kreisen, deren Radius von Null bis Unendlich wächst, genau entsprechend den Kreisen auf der negativen Seite.

Da wir die Punkte des Raumes durch Umdrehung der Halbebene um die z-Axe, wobei der Winkel ϑ von 0 bis 2π wächst,

erhalten, so können wir bei dieser Darstellung entweder ε von 0 bis 1 oder von 1 bis ∞ gehen lassen; λ hat von 0 bis 2π zu gehen.

Wir führen diese Coordinaten in die Gleichung $\Delta\varphi = 0$ ein. Dabei haben wir zunächst

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

und setzen $\varphi = \frac{\varphi_1}{\sqrt{\varrho}}$. Dann ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho}\frac{1}{\sqrt{\varrho}} - \frac{1}{2}\frac{\varphi_1}{\sqrt{\varrho^3}} \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\varrho^2} = \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\varrho^2}\frac{1}{\sqrt{\varrho}} - \frac{1}{\sqrt{\varrho^3}}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho} + \frac{3\varphi_1}{4\sqrt{\varrho^5}}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} = \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{4\varrho^2}\varphi_1\right).$$

Die Differentialgleichung wird also

$$\varrho^2\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\varrho^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\vartheta^2} + \tfrac{1}{4}\varphi_1 = 0. \qquad 66)$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\varrho + zi = \sigma \qquad \varrho - zi = \sigma'$$

$$\tau = \varepsilon(\cos\lambda + i\sin\lambda) \qquad \tau' = \varepsilon(\cos\lambda - i\sin\lambda),$$

so ist

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial\varrho} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\sigma'}\frac{\partial\sigma'}{\partial\varrho} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\sigma} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\sigma'}$$

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\varrho^2} = \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\sigma^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\sigma'^2} + 2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\sigma\partial\sigma'}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\sigma'}\frac{\partial\sigma'}{\partial z} = i\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\sigma} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial\sigma'}\right)$$

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\sigma^2} - \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\sigma'^2} + 2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\sigma\partial\sigma'}$$

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\varrho^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2} = 4\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\sigma\partial\sigma'}.$$

Nun ist $\qquad \sigma = b\frac{1-\tau}{1+\tau} \qquad \sigma' = b\frac{1-\tau'}{1+\tau'}$

$$d\sigma = -2b\frac{d\tau}{(1+\tau)^2} \qquad d\sigma' = -2b\frac{d\tau'}{(1+\tau')^2},$$

ferner

$$\varrho^2\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\varrho^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}\right) = (\sigma + \sigma')^2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\sigma\partial\sigma'} = (1 - \tau\tau')^2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\tau\partial\tau'}$$

$$\tau\tau' = \varepsilon^2 \qquad \log\tau = \log\varepsilon + \lambda i \qquad \log\tau' = \log\varepsilon - \lambda i$$

$$2\log\varepsilon = \log\tau + \log\tau' \qquad 2\lambda i = \log\tau - \log\tau'$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\tau}$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varepsilon}\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{1}{2i}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau}\frac{1}{\tau}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau\partial\tau'} = \tfrac{1}{4}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\varepsilon^2}\frac{\varepsilon^2}{\tau\tau'} + \tfrac{1}{4}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varepsilon}\frac{\varepsilon}{\tau\tau'} + \tfrac{1}{4}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\lambda^2}\frac{1}{\tau\tau'},$$

also

$$\varrho^2\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\varrho^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}\right) = \frac{(1-\varepsilon^2)^2}{4}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\lambda^2}\right).$$

Die Differentialgleichung wird demnach

$$\frac{(1-\varepsilon^2)^2}{4}\left\{\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\lambda^2}\right\} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\vartheta^2} + \tfrac{1}{4}\varphi_1 = 0. \qquad 67)$$

Wir setzen nun symmetrische Vertheilung aller Verhältnisse um die z-Axe voraus. Dann ist $\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = 0$. Ferner schreiben wir

$$\varphi_1 = \sin n\lambda\,\varphi_2,$$

wo φ_2 nur noch von ε abhängt. Dann haben wir

$$\frac{(1-\varepsilon^2)^2}{4}\left\{\frac{d^2\varphi_2}{d\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varphi_2}{d\varepsilon} - \frac{n^2}{\varepsilon^2}\varphi_2\right\} + \tfrac{1}{4}\varphi_2 = 0. \qquad 68)$$

Setzen wir nun

$$\frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon} = s \qquad \frac{d\varphi_2}{d\varepsilon} = -\frac{d\varphi_2}{ds}\frac{\varepsilon^2+1}{2\varepsilon^2}$$

$$\frac{d^2\varphi_2}{d\varepsilon^2} = \frac{d^2\varphi_2}{ds^2}\frac{(\varepsilon^2+1)^2}{4\varepsilon^4} + \frac{d\varphi_2}{ds}\frac{1}{\varepsilon^3},$$

so ist

$$\frac{d^2\varphi_2}{d\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varphi_2}{d\varepsilon} = \frac{d^2\varphi_2}{ds^2}\frac{(\varepsilon^2+1)^2}{4\varepsilon^4} + \frac{d\varphi_2}{ds}\frac{s}{\varepsilon^2}$$

$$\frac{(\varepsilon^2+1)^2}{4\varepsilon^4} = \frac{1+s^2}{\varepsilon^2}$$

und daher die Gleichung 68)

$$s^2(1+s^2)\frac{d^2\varphi_2}{ds^2} + \frac{d\varphi_2}{ds}s^3 - (n^2s^2 - \tfrac{1}{4})\varphi_2 = 0.$$

Wir können nun setzen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial z} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho}.$$

Dann hat ψ der Gleichung zu genügen

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0.$$

Setzen wir hier $\psi = \psi_1 \sqrt{\varrho}$, $\psi_1 = \sin n\lambda \psi_2$, so erhalten wir für ψ_1 dieselbe Gleichung

$$\frac{(1-\varepsilon^2)^2}{4}\left\{\frac{d^2\psi_2}{d\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\psi_2}{d\varepsilon} - \frac{n^2}{\varepsilon^2}\psi_2\right\} + \tfrac{1}{4}\psi_2 = 0. \qquad 69)$$

§ 10.

Entwickelung der hydrodynamischen Gleichungen aus dem Hamilton'schen Princip.

Die gegebene Ableitung der hydrodynamischen Gleichungen ist die gewöhnliche und hat den Vorzug, dass die einzelnen Schritte unmittelbar der Anschauung zugänglich gemacht werden können. Nachdem aber die wesentlichen Begriffe, die in der Hydrodynamik vorkommen, einmal festgestellt sind, ist es vom Standpunkte der strengen Methode aus von Wichtigkeit, die Gleichungen aus dem allgemeinsten Princip der conservativen Systeme, dem von Hamilton aufgestellten, zu entwickeln und die Nebenbedingungen festzustellen, die für diese Ableitung erforderlich sind.

Nach diesem Princip ist der Mittelwerth der Differenz der lebendigen Kraft und potentiellen Energie, für eine kurze Zeit berechnet, kleiner für den wirklichen Ablauf der Veränderungen, als auf allen anderen Wegen, die von derselben Anfangslage in dieselbe Endlage führen. Also ist

$$0 = \delta \int_{t_0}^{t_1} dt\,(L - F), \qquad 70)$$

wo L die lebendige Kraft, F die potentielle Energie bezeichnet. Die Variation ist so auszuführen, dass Anfangs- und Endlage festgehalten werden, dass also die Variationen der Coordinaten für $t = t_0$ und $t = t_1$ verschwinden.

Aus dem Hamilton'schen Princip ergeben sich nur die Gleichungen der Bewegung. Die Bedingung der continuirlichen Strömung (S. 7) muss als besondere, für die Hydrodynamik charakteristische Forderung hinzugefügt werden.

Bei der wirklich ausgeführten Bewegung der Flüssigkeit ist

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial (us)}{\partial x} + \frac{\partial (vs)}{\partial y} + \frac{\partial (ws)}{\partial z} = 0. \qquad 71)$$

Wenn wir nun die Coordinaten jedes Flüssigkeitstheilchens um die Grössen δx, δy, δz variiren, so dass wir uns die Flüssigkeit

jetzt auf anderen, benachbarten Bahnen strömend denken, so muss bei der Ueberführung aus der unvariirten Bewegung in die neuen Bahnen auch die Bedingung der Continuität erfüllt sein. Es muss also

$$\delta s + \frac{\partial(\delta x s)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta y s)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta z s)}{\partial z} = 0 \text{ sein.} \qquad 72)$$

Wir denken uns nun die Flächenelemente $dz\,dy$, $dz\,dx$, $dx\,dy$ mit der Flüssigkeit verbunden, wenn die Variationen ausgeführt werden, so dass dieselben durch die Variation Verschiebungen erfahren.

Die durch ein Flächenelement $dy\,dz$ strömende Flüssigkeit ist $su\,dy\,dz\,.\,dt$. Die Fläche $dy\,dz$ verschiebt sich bei der Variation um die Strecke $\frac{\partial \delta x}{\partial t}\,dt$. In Folge dessen strömt die Menge $s\,dy\,dz\,\frac{\partial \delta x}{\partial t}\,dt$ weniger hindurch. Also ist dies die Veränderung der hindurchströmenden Flüssigkeit in Folge der Variation. Dies giebt

$$\delta\,(su\,dy\,dz) = \frac{\partial \delta x}{\partial t}\,s\,dy\,dz. \qquad 73)$$

Was nun die Variation der Grösse $su\,dy\,dz$ betrifft, so müssen wir berücksichtigen, dass sich die Grösse su auch dadurch verändert, dass wir durch die Variation an andere Stellen des Raumes gelangen, an denen su andere Werthe hat, so dass die ganze Veränderung

$$\delta\,(su) + \frac{\partial(su)}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial(su)}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial(su)}{\partial z}\,\delta z \qquad \text{ist.}$$

Das Flächenelement $dy\,dz$ wird selbst durch die Variation noch Veränderungen erleiden, und zwar wird es sich um die z- und y-Axe drehen können. Dadurch treten die Stromcomponenten v, w durch dasselbe hindurch. Die Drehungswinkel sind $\frac{\partial \delta x}{\partial z}$ und $\frac{\partial \delta x}{\partial y}$. Für unendlich kleine Drehungen sind die durch die Drehung eintretenden Strömungen v und w den Drehungswinkeln proportional und zwar ist diese Strömung der von u herrührenden entgegengesetzt gerichtet, also haben wir hierdurch die Veränderung der Strömung um

$$-\left(sv\,\frac{\partial \delta x}{\partial y} + sw\,\frac{\partial \delta x}{\partial z}\right)dy\,dz.$$

Ausserdem ändert das Flächenelement bei der Variation seine Grösse durch Ausdehnung. Aus dy wird $dy + \frac{\partial \delta y}{\partial y}\,dy$, aus dz wird

$\left(dz + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right) dz$. Die Veränderung der Strömung durch diese Ausdehnung ist

$$su \left[\frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right] s\, dy\, dz.$$

Wir haben also

$$\delta\,[su\, dy\, dz] = \Big\{\delta\,(su) + \frac{\partial\,(su)}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial\,(su)}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial\,(su)}{\partial z}\,\delta z$$
$$+ su\left(\frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right) - sv\,\frac{\partial \delta x}{\partial y} - sw\,\frac{\partial \delta x}{\partial z}\Big\}\, dy\, dz,$$

also nach 73)

$$= \frac{\partial \delta x}{\partial t}\, s\, dy\, dz.$$

Hieraus ergiebt sich unter Berücksichtigung von 72)

$$\delta u = \frac{\partial \delta x}{\partial t} + u\,\frac{\partial \delta x}{\partial x} + v\,\frac{\partial \delta x}{\partial y} + w\,\frac{\partial \delta x}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x}\,\delta x - \frac{\partial u}{\partial y}\,\delta y - \frac{\partial u}{\partial z}\,\delta z. \quad 74)$$

In der Gleichung 70) haben wir zu setzen

$$\delta L = \delta\left(\tfrac{1}{2}\int\!\!\int\!\!\int s\,(u^2 + v^2 + w^2)\, dx\, dy\, dz\right).$$

Den Druck p können wir als die Kraft definiren, die durch Compression eines Volumenelements um den Betrag

$$-\left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

die potientielle Energie um die Grösse

$$-p\left(\frac{\partial \delta x}{\delta x} + \frac{\partial \delta y}{\delta y} + \frac{\partial \delta z}{\delta z}\right) dx\, dy\, dz$$

verändert. Ausserdem wird die potentielle Energie durch die äusseren Kräfte geändert. Sind deren Componenten X, Y, Z, so wird die Energie verändert um den Betrag

$$s\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dx\, dy\, dz,$$

weil durch die Variation gegen die äusseren Kräfte Arbeit geleistet wird. Wir nehmen an, dass die Kräfte ein Potential haben, und setzen $X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$

Das Hamilton'sche Princip wird also

$$0 = \int_{t_0}^{t} dt \int\!\!\int\!\!\int dx\, dy\, dz \Big[s\left\{\frac{\partial V}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\delta z\right\}$$

$$+ p\left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right) + \tfrac{1}{2}\delta\left\{s\left(u^2 + v^2 + w^2\right)\right\}\Big].$$

Hier sind die Integrationen über den ganzen von der Flüssigkeit erfüllten Raum auszudehnen. Die Variationen müssen so ausgeführt werden, dass die Grenzen der Flüssigkeit dabei nicht geändert werden. Dies ist nur dann der Fall, wenn die Veränderungen parallel der Normale der Grenzfläche verschwinden. Wir haben also für die Oberfläche die Bedingung

$$\delta x \cos nx + \delta y \cos ny + \delta z \cos nz = 0, \qquad 75)$$

wo nx, ny, nz die Cosinus der Winkel bezeichnen, die die Normale mit den Coordinatenaxen bildet.

Führen wir die Variationen aus, so ergiebt sich mit Berücksichtigung von 72)

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint dx\,dy\,dz \Big\{ s\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right) + p\left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right)$$
$$- \tfrac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)\left(\frac{\partial(s\delta x)}{\partial x} + \frac{\partial(s\delta y)}{\partial y} + \frac{\partial(s\delta z)}{\partial z}\right) + su\,\delta u + sv\,\delta v + sw\,\delta w\Big\} = 0.$$

Die Glieder, bei denen Differentialquotienten der Variationen vorkommen, werden partiell integrirt und zwar nach dem Schema

$$\iiint dx\,dy\,dz\,\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \iint \psi\varphi\,dy\,dz - \iiint dx\,dy\,dz\,\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

φ, ψ sind stetige Functionen von x, y, z. Da die Integrationen durch die Oberfläche des Raumes begrenzt werden, so sind für die ausgeführte Integration die Werthe an der Oberfläche einzusetzen. Ist ds ein Element der Oberfläche, so wird $dy\,dz = ds \cos nx$, da $dy\,dz$ die Projection von ds ist. Wir haben also

$$\begin{aligned}
\iiint dx\,dy\,dz\,\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \int ds \cos nx\,\psi\varphi - \iiint dx\,dy\,dz\,\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}\\
\iiint dx\,dy\,dz\,\psi\frac{\partial\varphi}{\partial y} &= \int ds \cos ny\,\psi\varphi - \iiint dx\,dy\,dz\,\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y}\\
\iiint dx\,dy\,dz\,\psi\frac{\partial\varphi}{\partial z} &= \int ds \cos nz\,\psi\varphi - \iiint dx\,dy\,dz\,\varphi\frac{\partial\psi}{\partial z}.
\end{aligned} \qquad 76)$$

Mit Berücksichtigung von 74) ergiebt sich hiernach, wenn wir

$$u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz = q$$

setzen, folgende Gleichung

$$0=\int_{t_0}^{t_1} dt\iiint dx\,dy\,dz\Big\{s\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x+\frac{\partial V}{\partial y}\delta y+\frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right)$$

$$-\tfrac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)\left(\frac{\partial(s\delta x)}{\partial x}+\frac{\partial(s\delta y)}{\partial y}+\frac{\partial(s\delta z)}{\partial z}\right)+p\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x}+\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right)$$

$$+su\frac{\partial\delta x}{\partial t}+su^2\frac{\partial\delta x}{\partial x}+suv\frac{\partial\delta x}{\partial y}+suw\frac{\partial\delta x}{\partial z}-su\frac{\partial u}{\partial x}\delta x-su\frac{\partial u}{\partial y}\delta y-su\frac{\partial u}{\partial z}\delta z$$

$$+sv\frac{\partial\delta y}{\partial t}+suv\frac{\partial\delta y}{\partial x}+sv^2\frac{\partial\delta y}{\partial y}+svw\frac{\partial\delta y}{\partial z}-sv\frac{\partial v}{\partial x}\delta x-sv\frac{\partial v}{\partial y}\delta y-sv\frac{\partial v}{\partial z}\delta z$$

$$+sw\frac{\partial\delta z}{\partial t}+suw\frac{\partial\delta z}{\partial x}+svw\frac{\partial\delta z}{\partial y}+sw^2\frac{\partial\delta z}{\partial z}-sw\frac{\partial w}{\partial x}\delta x-sw\frac{\partial w}{\partial y}\delta y-sw\frac{\partial w}{\partial z}\delta z\Big\}$$

$$=\int_{t_0}^{t_1} dt\iiint dx\,dy\,dz\Big\{s\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x+\frac{\partial V}{\partial y}\delta y+\frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right)$$

$$+\frac{s}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(u^2+v^2+w^2)\delta x+\frac{\partial}{\partial y}(u^2+v^2+w^2)\delta y+\frac{\partial}{\partial z}(u^2+v^2+w^2)\delta z\right]$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\delta x-\frac{\partial p}{\partial y}\delta y-\frac{\partial p}{\partial z}\delta z$$

$$-s\frac{\partial u}{\partial t}\delta x-2su\frac{\partial u}{\partial x}\delta x-sv\frac{\partial u}{\partial y}\delta x-sw\frac{\partial u}{\partial z}\delta x-su\frac{\partial v}{\partial y}\delta x-su\frac{\partial w}{\partial z}\delta x$$

$$-su\frac{\partial u}{\partial x}\delta x-su\frac{\partial u}{\partial y}\delta y-su\frac{\partial u}{\partial z}\delta z$$

$$-s\frac{\partial v}{\partial t}\delta y-su\frac{\partial v}{\partial x}\delta y-2sv\frac{\partial v}{\partial y}\delta y-sw\frac{\partial v}{\partial z}\delta y-sv\frac{\partial u}{\partial x}\delta y-sv\frac{\partial w}{\partial z}\delta y$$

$$-sv\frac{\partial v}{\partial x}\delta x-sv\frac{\partial v}{\partial y}\delta y-sv\frac{\partial v}{\partial z}\delta z$$

$$-s\frac{\partial w}{\partial t}\delta z-su\frac{\partial w}{\partial x}\delta z-sv\frac{\partial w}{\partial y}\delta z-2sw\frac{\partial w}{\partial z}\delta z-sw\frac{\partial u}{\partial x}\delta z-sw\frac{\partial v}{\partial y}\delta z$$

$$-sw\frac{\partial w}{\partial x}\delta x-sw\frac{\partial w}{\partial y}\delta y-sw\frac{\partial w}{\partial z}\delta z$$

$$-u\frac{\partial s}{\partial t}\delta x-u^2\frac{\partial s}{\partial x}\delta x-uv\frac{\partial s}{\partial y}\delta x-uw\frac{\partial s}{\partial z}\delta x-v\frac{\partial s}{\partial t}\delta y-uv\frac{\partial s}{\partial x}\delta y$$

$$-v^2\frac{\partial s}{\partial y}\delta y-vw\frac{\partial s}{\partial z}\delta y-w\frac{\partial s}{\partial t}\delta z-uw\frac{\partial s}{\partial x}\delta z-vw\frac{\partial s}{\partial y}\delta z-w^2\frac{\partial s}{\partial z}\delta z\Big\}$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int dt\,dS\Big\{-\frac{s}{2}(u^2+v^2+w^2)(\delta x\cos nx+\delta y\cos ny+\delta z\cos nz)$$

$$+sq(\delta x\,u+\delta y\,v+\delta z\,w)+p(\delta x\cos nx+\delta y\cos ny+\delta z\cos nz)\Big\}$$

$$+\left[\iiint dx\,dy\,dz\;s(u\,\delta x+v\,\delta y+w\,\delta z)\right]_{t_0}^{t_1}$$

An der Oberfläche gilt die Bedingung 75) und die, dass die Variationen in der Richtung der Geschwindigkeiten verschwinden, also $u\delta x + v\delta y + w\delta z = 0$ ist, ferner werden für $t = t_0$ und $t = t_1$ die Variationen Null, also verschwinden die beiden letzten Integrale. Da die Variationen willkürlich sind, so können wir zuerst $\delta z = \delta y = 0$, dann $\delta x = \delta z = 0$, endlich $\delta y = \delta x = 0$ setzen und erhalten, da der Factor von δx verschwinden muss, wenn das Integral verschwinden soll

$$s\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{s}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u^2 + v^2 + w^2) - s\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$- \frac{s}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u^2 + v^2 + w^2) - u\left[\frac{\partial s}{\partial t} + u\frac{\partial s}{\partial x} + v\frac{\partial s}{dy} + w\frac{\partial s}{\partial z}\right.$$
$$\left. + s\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] = 0.$$

Mit Rücksicht auf 71) haben wir also

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z},$$

und wenn wir die Factoren von δy und δz verschwinden lassen,

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$
$$\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Ist die Flüssigkeit incompressibel, so fällt bei dieser Ableitung die Veränderung der potentiellen Energie durch Druckänderung fort. Dann spielt der Druck nur die Rolle des unbestimmten Factors, der durch die Bedingung, dass bei der Variation die Gleichung $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ erfüllt sein muss, eingeführt wird.

Die allgemeinen Gleichungen für die Bewegung der Flüssigkeiten ohne Berücksichtigung der Reibung sind zuerst von Euler aufgestellt (Hist. de l'Acad. de Berlin 1755). Auch die Gleichungen, welche jetzt den Namen von Lagrange tragen, sind von ihm zuerst aufgestellt (Comment. acad. Petrop. T 14, 1759).

Die Berücksichtigung der Reibung rührt von Navier her (Mém. de l'Acad. 6, 1823). Später gelangten Poisson (Mémoire sur les Équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides; Journal de l'école Polytechnique 13, 1821) und Stokes (On the theories of the internal friction of fluids in motion; Camb. Trans. 8. 1845) zu den Be-

wegungsgleichungen reibender Flüssigkeiten. Während die beiden ersteren von molecularen Hypothesen ausgehen, benutzt Stokes nur die allgemeinen Gleichungen der Formänderung continuirlich verbreiteter Massen.

Der Greensche Satz ist zuerst abgeleitet in dem Aufsatz „Essay on electricity and magnetism Nottingham 1828, Art. 3“. Die von Clebsch herrührende Transformation befindet sich in der Abhandlung „Ueber die Integration der hydrodynamischen Gleichungen“; Crelle's Journal Bd. 56, S. 1.

Die Methode zur allgemeinen Transformation der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ für orthogonale Coordinaten rührt von Jacobi her (Crelle's Journal 36, 1847).

Die elliptischen Coordinaten sind von Lamé eingeführt (Sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température; Liouville 2, 1837); die Ringcoordinaten von Riemann (Ges. Werke S. 407).

Dass der Druck bei der Anwendung des Hamilton'schen Princips auf die Bewegung nicht zusammendrückbarer Flüssigkeiten die Rolle des integrirenden Factors spielt, war schon Lagrange bekannt. Der Weg, die allgemeinen Gleichungen aus dem Hamilton'schen Princip zu entwickeln, ist von Helmholtz angedeutet (Ges. Abh. III, S. 497).

Die Darstellung der Hauptdrucke und die hieraus sich ergebende der allgemeinen Bewegungsgleichungen rührt von Kirchhoff her (Mechanik, 11 Vorles.).

Die Uebertragung bekannter Bewegungen auf geometrisch ähnliche Formen ist von Helmholtz gegeben (Ges. Abh. I, S. 160 ff.).

II. Allgemeine Bewegungen nicht reibender Flüssigkeiten.

Wir betrachten jetzt die Bewegung einer nicht reibenden Flüssigkeit, setzen also die Reibungsconstante $k = 0$.

Wir haben dann also die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\mathfrak{B} - P)}{\partial x} &= u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}\\
\frac{\partial(\mathfrak{B} - P)}{\partial y} &= u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}\\
\frac{\partial(\mathfrak{B} - P)}{\partial z} &= u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial(us)}{\partial x} + \frac{\partial(vs)}{\partial y} + \frac{\partial(ws)}{\partial z} = 0. \tag{2}
$$

Wir differenziren die erste Gleichung nach y, die zweite nach x, und subtrahiren sie. Führen wir dann die Drehungsgeschwindigkeiten nach Gleichung 13) Abschnitt I ein, so ergiebt sich mit Berücksichtigung der Gleichung 2)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\zeta}{\partial t} + u\frac{\partial\zeta}{\partial x} + v\frac{\partial\zeta}{\partial y} + w\frac{\partial\zeta}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}\\
&\quad - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}\\
&= \xi\frac{\partial u}{\partial z} + \eta\frac{\partial v}{\partial z} + \zeta\frac{\partial w}{\partial z} + \zeta\frac{1}{s}\frac{ds}{dt} = \frac{d\zeta}{dt}
\end{aligned} \tag{3}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
s\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta}{s}\right) &= \xi\frac{\partial u}{\partial z} + \eta\frac{\partial v}{\partial z} + \zeta\frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{und}\\
s\frac{d}{dt}\left(\frac{\xi}{s}\right) &= \xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial v}{\partial x} + \zeta\frac{\partial w}{\partial x}\\
s\frac{d}{dt}\left(\frac{\eta}{s}\right) &= \xi\frac{\partial u}{\partial y} + \eta\frac{\partial v}{\partial y} + \zeta\frac{\partial w}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Addiren wir zu der Gleichung 3) anstatt

$$\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} \text{ die Glieder } \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x},$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} s\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta}{s}\right) &= \xi\frac{\partial w}{\partial x} + \eta\frac{\partial w}{\partial y} + \zeta\frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{und} \\ s\frac{d}{dt}\left(\frac{\xi}{s}\right) &= \xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial u}{\partial y} + \zeta\frac{\partial u}{\partial z} \qquad 5) \\ s\frac{d}{dt}\left(\frac{\eta}{s}\right) &= \xi\frac{\partial v}{\partial x} + \eta\frac{\partial v}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v}{\partial z}. \end{aligned}$$

Wenn also für ein Flüssigkeitstheilchen $\xi = \eta = \zeta = 0$ sind, so ist

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = 0;$$

Flüssigkeitstheilchen, die einmal keine Rotationsbewegung haben, bekommen auch im Laufe der Zeit keine Rotationsbewegung.

Denken wir uns durch jedes Flüssigkeitsteilchen eine Linie gezogen, die mit der Richtung der Drehungsaxe übereinstimmt. Eine solche Linie nennen wir eine Wirbellinie.

Bezeichnen wir jetzt die Coordinaten eines Flüssigkeitstheilchens zur Zeit t mit x, y, z, die dazu gehörenden Drehungsgeschwindigkeiten mit ξ, η, ζ, die Dichtigkeit mit s, die entsprechenden Werthe zur Zeit $t + dt$ mit x_1, y_1, z_1, ξ_1, η_1, ζ_1, s_1. Dann sind die Componenten der Verschiebung

$$x_1 - x,\ y_1 - y,\ z_1 - z,$$

während dt, also

$$x_1 - x = u dt \quad y_1 - y = v dt \quad z_1 - z = w dt.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} dt &= \frac{\partial x_1}{\partial x} - 1 & \frac{\partial v}{\partial x} dt &= \frac{\partial y_1}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} dt &= \frac{\partial z_1}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} dt &= \frac{\partial x_1}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} dt &= \frac{\partial y_1}{\partial y} - 1 & \frac{\partial w}{\partial y} dt &= \frac{\partial z_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} dt &= \frac{\partial x_1}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} dt &= \frac{\partial y_1}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} dt &= \frac{\partial z_1}{\partial z} - 1. \end{aligned}$$

Wir erhalten also aus den Gleichungen 5), wenn wir berücksichtigen, dass

$\frac{\xi}{s} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\xi}{s}\right)dt = \frac{\xi_1}{s_1}$ $\frac{\eta}{s} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\eta}{s}\right)dt = \frac{\eta_1}{s_1}$ $\frac{\zeta}{s} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta}{s}\right)dt = \frac{\zeta_1}{s_1}$ ist,

die folgenden:

$$\begin{aligned}
\frac{\xi_1}{s_1} &= \frac{\xi}{s}\frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\eta}{s}\frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\zeta}{s}\frac{\partial x_1}{\partial z} \\
\frac{\eta_1}{s_1} &= \frac{\xi}{s}\frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\eta}{s}\frac{\partial y_1}{\partial y} + \frac{\zeta}{s}\frac{\partial y_1}{\partial z} \\
\frac{\zeta_1}{s_1} &= \frac{\xi}{s}\frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\eta}{s}\frac{\partial z_1}{\partial y} + \frac{\zeta}{s}\frac{\partial z_1}{\partial z}
\end{aligned} \tag{6}$$

Es seien nun $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ die Coordinaten eines zweiten Flüssigkeitstheilchens zur Zeit t, ferner $x_1 + dx_1$, $y_1 + dy_1$, $z_1 + dz_1$ seine Coordinaten zur Zeit $t + dt$. Dies Theilchen soll zur Zeit t auf der durch das erste Theilchen gehenden Wirbellinie liegen. Ist ε eine unendlich kleine constante Grösse, so sind nach den Erörterungen S. 4

$$dx = \frac{\varepsilon\xi}{s} \qquad dy = \frac{\varepsilon\eta}{s} \qquad dz = \frac{\varepsilon\zeta}{s}$$

die Projectionen des Stückes der Wirbellinie, welches die beiden Theilchen verbindet. Setzen wir diese Werthe von $\frac{\xi}{s}$, $\frac{\eta}{s}$, $\frac{\zeta}{s}$ in die obige Gleichung, so erhalten wir mit Berücksichtung der Gleichungen

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial x}dx + \frac{\partial x_1}{\partial y}dy + \frac{\partial x_1}{\partial z}dz \text{ u. s. w.}$$

$$dx_1 = \frac{\xi_1}{s_1}\varepsilon \qquad dy_1 = \frac{\eta_1}{s_1}\varepsilon \qquad dz_1 = \frac{\zeta_1}{s_1}\varepsilon.$$

Es sind also dx_1, dy_1, dz_1 die Projectionen der Linie, welche die beiden Flüssigkeitstheilchen zur Zeit $t + dt$ verbindet und gleichzeitig Projectionen eines Stückes der neuen durch x_1, y_1, z_1 zur Zeit $t + dt$ gehenden Wirbellinie.

Hieraus folgt, dass alle Flüssigkeitstheilchen, die einmal auf einer Wirbellinie liegen, immer mit ihr verbunden bleiben.

Die resultirende Drehungsgeschwindigkeit ist

$$\sigma_1 = \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2}, \quad \text{also}$$

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = \frac{\sigma_1^2\varepsilon^2}{s_1^2}.$$

Also verändert sich mit der Zeit der Abstand zweier Flüssigkeitstheilchen in demselben Verhältniss, wie der Quotient von Drehungsgeschwindigkeit und Dichtigkeit.

Denken wir uns durch die Flüssigkeit eine Fläche gelegt, die überall senkrecht auf den Wirbellinien steht, und schneiden wir aus dieser Fläche ein unendlich kleines Stück aus. Die Wirbellinien, welche durch dies Stück gehen, schneiden nun aus der Flüssigkeit einen Faden aus, den wir einen Wirbelfaden nennen wollen.

Ein Wirbelfaden bleibt immer aus denselben Flüssigkeitstheilchen zusammengesetzt.

Wir legen durch den Wirbelfaden senkrecht zu den Wirbellinien zwei Schnitte durch benachbarte Flüssigkeitstheilchen, deren Abstand

$$dl_1 = \sqrt{dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2}$$

und deren Querschnitt ω sein soll. Dann ist zunächst $s_1 \omega dl_1$, die zwischen beiden Schnitten liegende Flüssigkeitsmenge, unabhängig von der Zeit.

Andererseits ist σ_1 proportional der Grösse $s_1 dl_1$, also ändert sich auch die Grösse $\sigma_1 \omega$ nicht mit der Zeit.

Das Product aus Drehungsgeschwindigkeit und Querschnitt bleibt der Zeit nach constant.

Aus den Gleichungen 13) Abschnitt I folgt durch theilweise Integration über einen geschlossenen Raum

$$0 = \int\int\int dx\, dy\, dz \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)$$

$$= \int dS \,(\cos nx\, \xi + \cos ny\, \eta + \cos nz\, \zeta) = \int dS \cos n\sigma \,.\, \sigma, \qquad 6\text{a})$$

wenn wir $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \sigma^2$ setzen.

Wir nehmen nun als den geschlossenen Raum, über den integrirt wird, einen durch die beiden Querschnitte ω_1 und ω_2 begrenzten Wirbelfaden. An den Seitenflächen verschwindet $\cos n\sigma$. Sind die Drehungsgeschwindigkeiten an den Querschnitten σ_1 und σ_2, so ist, da dort

$$\cos n\sigma = 1 \text{ und}$$
$$= -1 \text{ ist,}$$
$$\omega_1 \sigma_1 = \omega_2 \sigma_2 .$$

Das Product aus Drehungsgeschwindigkeit und Querschnitt ist also auf der ganzen Länge des Fadens constant.

Hieraus folgt, dass der Wirbelfaden niemals in der Flüssigkeit aufhören kann, sondern entweder in sich zurückläuft oder an der Begrenzung endet.

Ist die Bewegung durch die Geschwindigkeiten u, v, w gegeben, so sind durch die Gleichungen 13) Abschnitt I die Drehungsgeschwindigkeiten ξ, η, ζ bekannt. Aber auch umgekehrt kann man aus gegebenen Werthen von ξ, η, ζ und den Bedingungen an der Oberfläche der Flüssigkeit die Werthe von u, v, w finden, wenn man sich auf die Betrachtung nicht zusammendrückbarer Flüssigkeiten beschränkt. Die Werthe von ξ, η, ζ müssen der Gleichung

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

genügen. Ausserdem haben wir die Gleichungen

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}. \end{aligned} \tag{7}$$

Setzen wir diese Werthe in die vorigen Gleichungen und berücksichtigen die Gleichung der Continuität, so erhalten wir

$$\Delta \varphi = 0$$

$$\Delta U = -2\xi \qquad \Delta V = -2\eta \qquad \Delta W = -2\zeta. \tag{8}$$

Nach Gleichung 37) Abschnitt I werden diese Gleichungen durch die Ausdrücke integrirt

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2\pi}\int\int\int \frac{dx'\,dy'\,dz'\,\xi}{r} \\ V &= \frac{1}{2\pi}\int\int\int \frac{dx'\,dy'\,dz'\,\eta}{r} \\ W &= \frac{1}{2\pi}\int\int\int \frac{dx'\,dy'\,dz'\,\zeta}{r}, \qquad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

Hier bedeutet x die Entfernung des Volumenelements $dx\,dy\,dz$ von dem Punkte x, y, z, auf den U, V, W sich beziehen. ξ, η, ζ sind hier als Functionen von x', y', z' anzusehen. Im Unendlichen verschwinden U, V, W und somit auch u, v, w. Wenn ξ, η, ζ an irgend eine Stelle Sprünge im Werthe erleiden, so ist dies auch bei $\Delta U, \Delta V, \Delta W$ der Fall und umgekehrt. Dabei bleiben aber u, v, w stetig, weil U, V, W und die ersten Differentialquotienten stetig bleiben.

Die Gleichung $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$ ist ebenfalls erfüllt, weil

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = +\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int\!\!\int dx'\,dy'\,dz'\left[\xi\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + \eta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + \zeta\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\right].$$

Da nun

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}, \qquad \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} = -\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'}, \qquad \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} = -\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'},$$

so folgt durch partielle Integration über einen geschlossenen Raum

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi}\int dS\,(\xi\cos nx + \eta\cos ny + \zeta\cos nz)$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int\!\!\int\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x'} + \frac{\partial\eta}{\partial y'} + \frac{\partial\zeta}{\partial z'}\right).$$

Da nun im ganzen Raum

$$\frac{\partial\xi}{\partial x'} + \frac{\partial\eta}{\partial y'} + \frac{\partial\zeta}{\partial z'} = 0$$

und an der Oberfläche nach 6a)

$$\xi\cos nx + \eta\cos ny + \zeta\cos nz = 0,$$

so ist auch die Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

erfüllt.

Wenn man die Werthe der Geschwindigkeitscomponenten u, v, w nach den Gleichungen 7) bildet, so liefert jedes Raumelement dx', dy', dz' beziehentlich den Beitrag

$$\frac{dx'\,dy'\,dz'}{2\pi}\left(\zeta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - \eta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{dx'\,dy'\,dz'}{2\pi}\left(\xi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} - \zeta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)$$

$$\frac{dx'\,dy'\,dz'}{2\pi}\left(\eta\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} - \xi\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right).$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit ξ, die zweite mit η, die dritte mit ζ und addirt alle drei, so erhält man die Summe Null. Die resultirende Geschwindigkeit steht also senkrecht auf der Richtung der resultirenden Drehungsaxe im Element $dx'\,dy'\,dz'$.

Berücksichtigt man, dass $\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{x-x'}{r^3}$ u. s. w. ist und dass $\frac{x-x'}{r} = \cos rx$, $\frac{y-y'}{r} = \cos rz$, $\frac{z-z'}{r} = \cos rz$ ist, so findet man durch Multiplication der einzelnen Glieder mit $\cos rx$, $\cos ry$, $\cos rz$ und Addition ebenfalls die Summe Null. Die Richtung der resultirenden Geschwindigkeit steht also auch senkrecht auf r. Für die resultirende Geschwindigkeit ergiebt sich

$$= \frac{dx'\,dy'\,dz'}{2\pi}\sqrt{\left(\zeta\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - \eta\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)^2 + \left(\xi\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} - \zeta\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)^2 + \left(\eta\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} - \xi\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right)^2}.$$

Berücksichtigt man, dass

$$\frac{\xi^2}{r^6}\left[(z-z')^2 + (y-y')^2\right] = \frac{\xi^2}{r^4}\left\{1 - \frac{(x-x')^2}{r^2}\right\} \text{ u. s. w.}$$

ist, und bezeichnet den Winkel, den die Drehungsaxe im Element $dx'\,dy'\,dz'$ mit der Richtung r bildet mit ϑ, so ist

$$\cos\vartheta = \frac{\xi(x-x') + \eta(y-y') + \zeta(z-z')}{r\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}$$

$$\sin\vartheta = \sqrt{\frac{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\,r^2 - \left\{\xi(x-x') + \eta(y-y') + \zeta(z-z')\right\}^2}{r^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}}$$

so ergiebt sich die resultirende Geschwindigkeit

$$= \frac{dx'\,dy'\,dz'}{2\pi}\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\,\frac{\sin\vartheta}{r^2}$$

Die lebendige Kraft der Flüssigkeit ist bei constanter Dichtigkeit

$$L = \tfrac{1}{2}\,s\iiint dx\,dy\,dz\,(u^2+v^2+w^2).$$

Setzen wir hierin

$$u^2 = u\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

$$v^2 = v\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right)$$

$$w^2 = w\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

Durch partielle Integration ergiebt sich

$$L = \frac{s}{2}\int dS\varphi\,(u\cos nx + v\cos ny + w\cos nz)$$

$$+ \frac{s}{2}\int dS\,[U(v\cos nz - w\cos ny) + V(w\cos nx - u\cos nz)$$
$$+ W(u\cos ny - v\cos nx)]$$
$$+ s\iiint dx\,dy\,dz\,(U\xi + V\eta + W\zeta).$$

Ist die Flüssigkeit von unendlicher Ausdehnung, so kann man sie in eine Kugelschale von unendlich grossem Radius R eingeschlossen denken. Da dS wie R^2 zunimmt, u, v, w wie $\frac{1}{R^2}$ abnehmen, φ, U, V, W wie $\frac{1}{R}$ abnehmen, so verschwinden die Integrale, die über die Oberfläche zu erstrecken sind, und es ist

$$L = s\iiint dx\,dy\,dz\,(U\xi + V\eta + W\zeta).$$

Wir gehen jetzt zur Betrachtung einzelner Aufgaben über, bei denen Wirbelbewegungen auftreten. Der einfachste Fall ist der, wo nur eine Rotation um geradlinige und parallele Axen vorhanden sind, die der z-Axe parallel sein mögen. Es ist also

$$w = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial z} = \xi = \eta = 0.$$

Die Gleichungen 4) geben $\frac{d\zeta}{dt} = 0$, $\qquad 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$.

Die Drehungsgeschwindigkeit eines identischen Flüssigkeitstheilchens bleibt constant. Ferner ist

$$u = \frac{\partial W}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial W}{\partial x}$$

$$W = \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r}\,\zeta$$

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2.$$

Wir können nun den Punkt x, y, z in die xy-Ebene legen, weil W von z unabhängig ist. Dann ist $z = 0$. Ferner setzen wir $r^2 = \varrho^2 + z'^2$. Da nun

$$\int_{-x'}^{+x'} \frac{dx'}{\sqrt{\varrho^2 + x'^2}} = \log \frac{x' + \sqrt{\varrho^2 + x'^2}}{-x' + \sqrt{\varrho^2 + x'^2}} \text{ ist,}$$

so wird, da die Grenzen $-x'$ und x' im Unendlichen liegen,

$$\sqrt{\varrho^2 + x'^2} = x' \sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{x'^2}} = x' \left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{\varrho^2}{x'^2}\right)$$

$$W = \frac{1}{\pi} \int\int dx'\, dy'\, \zeta \log \frac{2x'}{\varrho}.$$

Das Integral ist wegen des unendlich grossen Werthes von x' unendlich, kann aber geschrieben werden

$$W = \frac{1}{\pi}\left[\int\int dx'\, dy' \zeta \log 2x' - \int\int dx'\, dy'\, \zeta \log \varrho\right].$$

Hier ist der erste Theil unendlich gross aber constant, der zweite ist variabel und endlich. Deshalb sind die Differentialquotienten von W endlich.

Es ist hiernach

$$u = \frac{\partial W}{\partial y} = -\frac{1}{\pi}\int\int dx' dy'\, \zeta\, \frac{(y - y')}{\varrho^2}$$

$$v = -\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{\pi}\int\int dx' dy'\, \zeta\, \frac{(x - x')}{\varrho^2}.$$

Jedes Flächenelement $dx'\, dy'$ liefert also einen Beitrag zu u von der Grösse $-\frac{\zeta\,(y - y')\, dx'\, dy'}{\pi \varrho^2}$, zu v von der Grösse $\frac{\zeta(x - x') dx'\, dy'}{\pi \varrho^2}$. Diese Geschwindigkeit steht senkrecht auf der Richtung ϱ, und die resultierende Geschwindigkeit ist

$$\frac{\zeta\, dx'\, dy'}{\pi \varrho}.$$

Haben wir in einer Wassermasse mehrere Wirbelfäden von unendlich kleinem Querschnitt, und bezeichnen mit m_1, m_2, m_3 ... die Producte aus Drehungsgeschwindigkeit und Querschnitt, so ist nach dem eben erhaltenen Resultat, wenn die Indices sich auf die einzelnen Wirbelfäden beziehen,

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3 \ldots\ldots = m_1 \left(m_2 \frac{(y_1 - y_2)}{\pi \varrho_{12}^2} + m_3 \frac{(y_1 - y_3)}{\pi \varrho_{13}^2} \ldots\right)$$

$$+ m_2 \left(m_1 \frac{(y_2 - y_1)}{\pi \varrho_{12}^2} + m_3 \frac{(y_2 - y_3)}{\pi \varrho_{23}^2} \dots \right)$$

$$+ m_3 \left(m_1 \frac{(y_3 - y_1)}{\pi \varrho_{13}^2} + m_2 \frac{(y_3 - y_2)}{\pi \varrho_{23}^2} \dots \right).$$

Auf der rechten Seite heben sich die Glieder wechselseitig fort, also ist die Summe der linken Seite Null.

Ebenso verschwindet die Summe $m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots$.

Wir bezeichnen Σm mit M und mit

$$\frac{\Sigma m u}{M} \quad \text{und} \quad \frac{\Sigma m v}{M}$$

die Componenten der Geschwindigkeit des Schwerpunkts der Grössen m_1, m_2 .... Der Schwerpunkt der Wirbelfäden bleibt dann bei der Bewegung unverändert.

Haben wir es mit zwei Wirbelfäden von unendlich kleinem Querschnitt zu thun, so treibt jeder den anderen in einer Richtung fort, die senkrecht auf der Verbindungslinie steht. Da der Schwerpunkt ungeändert bleibt, so werden sie sich um diesen drehen. Ist die Rotationsgeschwindigkeit in beiden dieselbe, so liegt der Schwerpunkt zwischen ihnen. Bei entgegengesetzter Richtung liegt er auf der Verlängerung der Verbindungslinie. Wenn in diesem Falle das Product aus Drehungsgeschwindigkeit und Querschnitt gleich ist, so fällt der Schwerpunkt ins Unendliche und es schreiten dann beide Wirbelfäden senkrecht zu ihrer Verbindungslinie mit gleicher Geschwindigkeit fort.

Der einfachste Fall gekrümmter Wirbelringe ist der, wo vollständige Symmetrie aller Bewegungen um eine Axe vorhanden ist. Dann sind alle Wirbellinien Kreise.

Wir setzen

$$x = \varrho \cos \vartheta, \quad y = \varrho \sin \vartheta$$

$$\frac{dx}{dt} = u = \mathfrak{r} \cos \vartheta - \mathfrak{y} \varrho \sin \vartheta$$

$$\frac{dy}{dt} = v = \mathfrak{r} \sin \vartheta + \mathfrak{y} \varrho \cos \vartheta.$$

Dann sind wegen der Symmetrie um die z-Axe die Grössen $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{y}$, P, $\mathfrak{V}$ von ϑ unabhängig und die Gleichungen 1) werden

$$\frac{\partial (\mathfrak{V} - P)}{\partial \varrho} = \mathfrak{r} \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \varrho} + w \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial z} - \mathfrak{y}^2 \varrho + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial (\mathfrak{V} - P)}{\partial z} = \mathfrak{r} \frac{\partial w}{\partial \varrho} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \qquad 10)$$

$$0 = \mathfrak{r}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \varrho} + w\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z} + \frac{2\mathfrak{y}\mathfrak{r}}{\varrho} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}.$$

Die Gleichung der Continuität wird

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}(\mathfrak{r}\varrho) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{11}$$

Es existirt also eine Function ψ von der Art, dass

$$\mathfrak{r} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \qquad w = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \psi}{\partial \varrho}.$$

Die Cosinus der Winkel, welche die Normale der Linien $\psi = \text{const}$ mit der ϱ- und z-Axe bildet, sind

$$\cos n\varrho = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial \varrho}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial \varrho}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2}}, \quad \cos nz = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial \varrho}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2}}.$$

Es ist also

$$\mathfrak{r}\cos n\varrho + w \cos nz = 0.$$

Die Richtung der resultirenden Geschwindigkeit $\sqrt{\mathfrak{r}^2 + w^2}$ steht also senkrecht auf der Normale der Linie $\psi = \text{const}$, die Strömung erfolgt überall parallel diesen Linien.

Hierdurch wird die Gleichung der Continuität identisch erfüllt. Ist $\mathfrak{y} = 0$, so finden nur Bewegungen parallel ϱ und z statt. In diesem Falle erhalten wir durch differenziren der beiden ersten Gleichungen und subtrahiren

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \psi}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left[\frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \psi}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right)\right] \\ - \frac{\partial \psi}{\partial \varrho}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \psi}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{12}$$

Beschränken wir uns im Folgenden auf stationäre Bewegungen, so ist in der Gleichung 12)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \psi}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right) = 0,$$

und die dann übrigbleibende Differentialgleichung giebt als allgemeines Integral

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \psi}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \varrho^2 F(\psi), \tag{13}$$

wenn F eine beliebige Function des einen Argumentes ψ ist. Man sieht dies leicht, wenn man erwägt, dass

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\varrho^2}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)\right]=\frac{dF}{d\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial\varrho}\left[\frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\varrho^2}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)\right]=\frac{dF}{d\psi}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho} \qquad 14)$$

ist, und diese Werthe in die Gleichung einsetzt.

Für den Druck erhalten wir

$$\mathfrak{B}-P=\text{const}+\frac{1}{2\varrho^2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varrho}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right]-\int F(\psi)\,d\psi. \qquad 15)$$

Man überzeugt sich durch Ausführung der Differentiationen leicht von der Richtigkeit der Behauptung.

Ferner ist

$$2\sigma=\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial\varrho}=\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\varrho^2}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)=\varrho\,F(\psi). \qquad 16)$$

σ ist unabhängig von ϑ. Und wir können setzen $\xi=-\sigma\sin\vartheta$, $\eta=\sigma\cos\vartheta$. σ ist die Drehungsgeschwindigkeit um Axen, die den kreisförmigen Wirbellinien parallel sind.

Ist σ überall constant, so ist nach 16)

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=0 \quad \text{und} \quad \psi=c\varrho^3+c_1\varrho^2+c_2,$$

wo c, c_1 und c_2 Constanten sind.

$$w=-3c\varrho, \qquad \mathfrak{r}=0.$$

Eine solche Bewegung kann stattfinden in einem unendlichen Cylinder vom Radius ϱ. Man hat dann nur Strömungen parallel der Axe des Cylinders.

Wenn die Drehungsgeschwindigkeiten unstetig sind, d. h. in einzelnen Theilen der Flüssigkeit endliche Werthe haben und in den anderen verschwinden, so ist die Darstellung der Geschwindigkeiten durch die Potentialfunctionen der einfachste Weg, weil diese Functionen die Unstetigkeiten ohne weiteres berücksichtigen.

Wir hatten

$$\xi=-\sigma\sin\vartheta \qquad \eta=\sigma\cos\vartheta \qquad \zeta=0.$$

Daher ist $w=0$ und nach 7)

$$u=-\frac{\partial V}{\partial x} \qquad v=\frac{\partial U}{\partial x} \qquad w=\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$U=-\frac{1}{2\pi}\iiint\frac{\sigma'\sin\vartheta'\varrho'\,d\varrho'\,dx'\,d\vartheta'}{r}$$

$$V = +\frac{1}{2\pi}\int\int\int\frac{\sigma'\cos\vartheta'\,\varrho' d\varrho'\,dz'\,d\vartheta'}{r}$$

$$r^2 = \varrho'^2 + \varrho^2 - 2\varrho\varrho'\cos(\vartheta - \vartheta') + (z - z')^2.$$

Die gestrichenen Buchstaben beziehen sich auf das Volumelement. Die Integration in Bezug auf ϑ' ist von 0 bis 2π zu nehmen. Führt man anstatt ϑ' die Grösse $\vartheta' - \vartheta$ als unabhängige Variabeln ein und berücksichtigt, dass das Integral

$$\int_{-\vartheta}^{2\pi-\vartheta}\frac{\sin(\vartheta'-\vartheta)\,d(\vartheta'-\vartheta)}{\sqrt{(z-z')^2+\varrho^2+\varrho'^2-2\varrho\varrho'\cos(\vartheta-\vartheta')}} = 0 \text{ ist,}$$

weil das unbestimmte Integral eine Function von $\cos(\vartheta - \vartheta')$ ist und daher für $-\vartheta$ und $2\pi - \vartheta$ denselben Werth annimmt, so ergiebt sich

$$V\cos\vartheta - U\sin\vartheta = +\frac{1}{2\pi}\int\int\int\frac{\sigma'\cos(\vartheta'-\vartheta)\,d(\vartheta'-\vartheta)\,\varrho'\,d\varrho'\,dz'}{r} = \mathfrak{S}$$

und

$$V\sin\vartheta + U\cos\vartheta = 0.$$

Also ist

$$-\mathfrak{S}\sin\vartheta = U, \qquad \mathfrak{S}\cos\vartheta = V;$$

ferner

$$u = -\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial z}\cos\vartheta, \qquad v = -\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial z}\sin\vartheta$$

$$= \mathfrak{r}\cos\vartheta \qquad\qquad = \mathfrak{r}\sin\vartheta,$$

also ist, da $\sin\vartheta = \frac{y}{\varrho}$, $\cos\vartheta = \frac{x}{\varrho}$,

$$\mathfrak{r} = -\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial z} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial x}\frac{x}{\varrho} + \frac{\mathfrak{S}}{\varrho} + \frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial y}\frac{y}{\varrho} + \frac{\mathfrak{S}}{\varrho} - \frac{\mathfrak{S}(x^2+y^2)}{\varrho^3}. \quad 16a)$$

Da nun

$$\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial x} = \frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial\varrho}\frac{x}{\varrho}, \quad \frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial y} = \frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial\varrho}\frac{y}{\varrho}$$

ist, so wird

$$w = \frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial\varrho} + \frac{\mathfrak{S}}{\varrho} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho} = \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial(\mathfrak{S}\varrho)}{\partial\varrho}. \qquad 16b)$$

Also folgt weiter $-\psi = \mathfrak{S}\varrho$; $\mathfrak{S}\varrho = \text{const}$ sind demnach die Stromlinien.

Führen wir für $\vartheta' - \vartheta$ die neue Variable $\pi - 2\Theta$ ein und bemerken, dass über den ganzen Umlauf des Winkels $\vartheta' - \vartheta$ integrirt wird, man also in Bezug auf ihn von 0 bis 2π integriren kann, so ist

$$\mathfrak{S} = -\frac{2}{\pi}\int\int \sigma'\varrho' d\varrho' dz' \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-2\sin^2\Theta)\, d\Theta}{\sqrt{(z-z')^2 + (\varrho + \varrho')^2 - 4\varrho\varrho' \sin^2\Theta}}.$$

Setzen wir

$$K = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Theta}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\Theta}}, \qquad E = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\Theta},$$

so sind K und E die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung in Bezug auf den Modul $\varkappa$.

Das Integral $\mathfrak{S}$ lässt sich daher auf die Form bringen

$$\mathfrak{S} = -\frac{1}{\pi}\int\int \frac{\varrho' dz' d\varrho' \sigma'}{\sqrt{\varrho\varrho'}} \left[\varkappa\, K + \frac{2}{\varkappa}\left(E - K\right)\right],$$

$$\text{wo } \varkappa^2 = \frac{4\varrho\varrho'}{(z-z')^2 + (\varrho + \varrho')^2} \text{ ist.}$$

Differenzirt man $\mathfrak{S}$ nach z und nach z', so erhält man gleiche Ausdrücke mit entgegengesetztem Vorzeichen. Man erhält also entgegengesetzte Werthe, wenn man unter den Integralzeichen in dem Factor von $\sigma'\varrho' dz' d\varrho'$ die gestrichenen Buchstaben mit den ungestrichenen vertauscht. Bildet man also das Integral

$$\int\int \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial z}\, \sigma\varrho\, d\varrho\, dz$$

über denselben Raum erstreckt, wie das über ϱ' und z' zu nehmende, so kommen paarweise entgegengesetzte Werthe vor, die sich gegenseitig aufheben. Es ist also

$$\int\int \sigma \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial z}\, \varrho\, d\varrho\, dz = 0$$

oder nach 16a)

$$\int\int \sigma\varrho\, \mathfrak{r}\, d\varrho\, dz = 0 = \int\int \sigma\varrho \frac{d\varrho}{dt}\, d\varrho\, dz.$$

Nun ist, wie wir gesehen haben $\sigma\, d\varrho\, dz$ von der Zeit unabhängig, wenn es auf bestimmte Flüssigkeitstheilchen bezogen wird.

Daher ist

$$\frac{d}{dt}\int\int \sigma \varrho^2\, d\varrho\, dz = 0\,, \qquad \int\int \sigma \varrho^2\, d\varrho\, dz = \text{const.}$$

Setzen wir

$$\frac{\int\int \varrho^2\, \sigma\, d\varrho\, dz}{\int\int \sigma\, d\varrho\, dz} = R^2,$$

so ist R eine mittlere Entfernung sämmtlicher vorhandenen Wirbelringe von der z-Axe.

Wenn in einer unendlichen Flüssigkeit sich nur ein Wirbelring befindet, dessen Querschnitt unendlich klein gegen den Radius des Ringes ist, so bleibt dieser Radius unverändert.

Es ist nun

$$\frac{2}{x}\,\varrho\,\frac{\partial x}{\partial \varrho} = \frac{(z-z')^2 + \varrho'^2 - \varrho^2}{(z-z')^2 + (\varrho+\varrho')^2}$$

$$\frac{2}{x}\,z\,\frac{\partial x}{\partial z} = -\,\frac{2z\,(z-z')}{(z-z')^2 + (\varrho+\varrho')^2}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{2}{x}\left(\varrho\,\frac{\partial x}{\partial \varrho} + z\,\frac{\partial x}{\partial z}\right) = \frac{z'^2 - z^2 + \varrho'^2 - \varrho^2}{(z-z')^2 + (\varrho+\varrho')^2}.$$

Andererseits ist

$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \varrho} = \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \varrho} - \frac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{S}}{\varrho}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial z}.$$

x ändert sich nicht, wenn die gestrichenen mit den ungestrichenen Buchstaben vertauscht werden. Ebensowenig ändert sich $\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x}$.

Daher nimmt

$$\varrho\,\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \varrho} + z\,\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial z} + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{S} = \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x}\left(\varrho\,\frac{\partial x}{\partial \varrho} + z\,\frac{\partial x}{\partial z}\right)$$

bei der Vertauschung den entgegengesetzten Werth an.

Es ist also ebenso wie vorher

$$\int\int\left(\varrho\,\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \varrho} + z\,\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial z} + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{S}\right)\sigma\varrho\, d\varrho\, dz = 0$$

oder nach 16a) und 16b), da

$$\varrho \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \varrho} = w\varrho - \mathfrak{S} \text{ ist,}$$

$$\int\int (w\varrho^2 - \mathfrak{r}\, x\varrho - \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{S}\varrho)\, \sigma d\varrho\, dx = 0. \qquad 16\text{c})$$

Betrachten wir einen Wirbelring von unendlich kleinem Querschnitt $d\varrho\, dx$ und wollen die Fortbewegung dieses Ringes untersuchen, so müssen wir die Bewegung der Flüssigkeitstheilchen verfolgen, die sich in seiner unmittelbaren Umgebung befinden. Die Entfernung eines Flüssigkeitstheilchens vom Wirbelring ist

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (\varrho - \varrho')^2}.$$

Wählen wir ein Flüssigkeitstheilchen in der Nähe des Wirbelrings, für das $\varrho' - \varrho$ und $x - x'$ sehr klein ist, und setzen wir

$$\int\int dx'\, d\varrho'\, \sigma' = m, \qquad \varkappa^2 = 1 - \frac{(x - x')^2 + (\varrho - \varrho')^2}{(x - x')^2 + (\varrho + \varrho')^2},$$

so ist annähernd

$$\mathfrak{S} = -\frac{m}{\pi}\left(\varkappa K + \frac{2}{\varkappa}(E - K)\right).$$

Schreiben wir $\varkappa'^2 = 1 - \varkappa^2$, so ist $\varkappa'$ eine unendlich kleine Grösse. Nun gelten für die elliptischen Integrale folgende Reihenentwickelungen

$$K = \log\left(\frac{4}{\varkappa'}\right) + (\tfrac{1}{2})^2\left[\log\left(\frac{4}{\varkappa'}\right) - 1\right]\varkappa'^2 + \ldots.$$

$$E = 1 + \tfrac{1}{2}\left(\log\frac{4}{\varkappa'} - \frac{1}{1.2}\right)\varkappa'^2 \ldots.$$

Beschränken wir uns auf das erste Glied, so ist

$$K = \log\frac{4}{\varkappa'}$$

unendlich gross auch gegen E, und wir haben bei Vernachlässigung von Grössen zweiter Ordnung

$$\mathfrak{S} = -\frac{m}{2\pi}\log\frac{(x - x')^2 + (\varrho - \varrho')^2}{16\,[(x - x')^2 + (\varrho + \varrho')^2]},$$

also

$$\mathfrak{r} = \frac{d\varrho}{dt} = -\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial x} = -\frac{m}{\pi}\left(\frac{(x - x')}{(x - x')^2 + (\varrho + \varrho')^2} - \frac{(x - x')}{(x - x')^2 + (\varrho - \varrho')^2}\right)$$

$$w = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial\varrho} = +\frac{m}{\pi}\left(\frac{(\varrho + \varrho')}{(x - x')^2 + (\varrho + \varrho')^2} - \frac{(\varrho - \varrho')}{(x - x')^2 + (\varrho - \varrho')^2}\right).$$

Wenn $x - x'$, $\rho - \rho'$ von der Ordnung ε unendlich klein sind, so ist $\mathfrak{r}$ und w von der Ordnung $\frac{1}{\varepsilon}$ unendlich gross. $\mathfrak{S}$ ist unendlich von der Ordnung $\log \varepsilon$.

Wir setzen nun die mittleren Coordinaten des Wirbelringes ρ_0 und x_0 fest nach den Gleichungen

$$\rho_0{}^2 \int\int \sigma\, d\rho\, dx = \int\int \rho^2 \sigma\, d\rho\, dx$$

$$x_0 \int\int \rho^2 \sigma\, d\rho\, dx = \int\int \sigma x\, \rho^2\, d\rho\, dx,$$

also ist

$$\int\int \sigma x \rho^2\, d\rho\, dx = x_0\, \rho_0{}^2 \int\int \sigma\, d\rho\, dx$$

$$= x_0\, \rho_0{}^2 m.$$

Differenzirt man diese Gleichung nach der Zeit, so wird, da $\sigma\, d\rho\, dx$ und ρ_0 von der Zeit nicht abhängen

$$m \rho_0{}^2 \frac{dx_0}{dt} = \int\int \sigma \rho^2\, d\rho\, dx \cdot \frac{dx}{dt} + 2 \int\int \sigma x \rho \frac{d\rho}{dt} \cdot d\rho\, dx.$$

Hiernach wird die Gleichung 16c)

$$m \rho_0{}^2 \frac{dx_0}{dt} = \tfrac{1}{2} \int\int \mathfrak{S} \rho \sigma\, d\rho\, dx + 3 \int\int x \rho \frac{d\rho}{dt} \sigma\, d\rho\, dx.$$

Wenn m endlich sein soll, so muss σ von der Ordnung $\frac{1}{\varepsilon^2}$ sein, weil $dx\, d\rho$ von der Ordnung ε^2 ist.

Ziehen wir von der letzten Gleichung die Gleichung

$$x_0 \int\int \sigma \rho \frac{d\rho}{dt}\, d\rho\, dx = 0$$

ab, so erhalten wir

$$m \rho_0{}^2 \frac{dx_0}{dt} = \tfrac{1}{2} \int\int \mathfrak{S} \rho \sigma\, d\rho\, dx + 3 \int\int \rho \frac{d\rho}{dt} (x - x_0)\, \sigma\, d\rho\, dx.$$

Nun ist $x - x_0$ von der Ordnung ε, $\frac{d\rho}{dt}$ ist von der Ordnung $\frac{1}{\varepsilon}$. Daher ist das zweite Glied endlich. Da $\mathfrak{S}$ von der Ordnung $\log \varepsilon$ unendlich ist, so ist das erste Glied und damit $\frac{dx_0}{dt}$ von dieser Ordnung unendlich. Ein kreisförmiger Wirbelring von kleinem

Querschnitt und endlichem Radius schreitet daher mit grosser Geschwindigkeit parallel seiner Axe fort.

Mit den kreisförmigen Wirbelringen hängt eng eine Klasse von stationären Flüssigkeitsbewegungen zusammen, die von besonderem Interesse für die Theorie der Cyklonen sind. Auch hier herrscht im wesentlichen Symmetrie um eine Axe.

Von wesentlich bestimmendem Einfluss ist hierbei die Drehungsgeschwindigkeit um die Symmetrieaxe bei stationärer Bewegung.

Eliminirt man aus den Gleichungen 10) die Grösse $\mathfrak{B} - P$, so fällt die Drehungsgeschwindigkeit aus dem Resultat ganz heraus, wenn $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z}$ verschwindet. Dann gilt die Gleichung 12). Die Drehungsgeschwindigkeit um die Axe der Cyklone hat also keinen Einfluss auf die radialen und axialen Geschwindigkeiten, wenn die Drehungsgeschwindigkeit unabhängig von der vertikalen, der Cyklonenaxe parallelen Coordinate ist.

In diesem Falle giebt die dritte der Gleichungen 10)

$$\frac{d\mathfrak{v}}{d\varrho} = -\frac{2\mathfrak{v}}{\varrho}, \quad \text{also} \quad \mathfrak{v} = \frac{c}{\varrho^2},$$

wo c eine Constante bezeichnet. Die Drehungsgeschwindigkeit hat in diesem Fall einen einzigen möglichen Werth, wenn sie nicht Null ist. Sie nimmt nach aussen hin ab, wie das Quadrat des Abstandes von der Axe. In der Nähe der Axe selbst wird die Drehungsgeschwindigkeit unendlich. Es folgt hieraus, dass in einer nur horizontal begrenzten Flüssigkeit eine von der verticalen Coordinate unabhängige Drehungsgeschwindigkeit nur existiren kann, wenn die Drehungsgeschwindigkeit an einer bestimmten Cylinderfläche unstetig wird. In dem inneren Cylinder muss dann $c = 0$ sein, im äusseren kann c von Null verschieden sein.

Durch die Function $F(\psi)$ werden nach 16) die Wirbellinien um die Cyklonenaxe bestimmt.

Der einfachste Fall ist der, wo $F(\psi) = -k\psi$ ist; k bedeutet eine Constante.

Wir haben dann die Gleichung

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -k\varrho^2\psi. \tag{17}$$

Setzen wir $\psi = \varphi \sin mz$, wo φ eine Function von ϱ ist, so verschwindet

$$w = -\frac{1}{\varrho}\frac{d\varphi}{d\varrho}\sin mz$$

für $z = 0$ und $z = \frac{\pi}{m}$. Wir können also die Flüssigkeit durch zwei horizontale Ebenen eingeschlossen denken, deren Abstand $\frac{\pi}{m}$ ist. Die Gleichung 17) wird

$$\frac{d^2\varphi}{d\varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{d\varphi}{d\varrho} - (m^2 - k\varrho^2)\,\varphi = 0. \tag{18}$$

Setzen wir nun $\varphi = \alpha\beta$, $\varrho = \sqrt{\beta}$, so ist die Gleichung 18)

$$\beta\frac{d^2\alpha}{d\beta^2} + 2\frac{d\alpha}{d\beta} - \frac{(m^2 - k\beta)}{4}\alpha = 0. \tag{19}$$

Das Vorzeichen von k muss positiv sein, weil sonst die Geschwindigkeiten im Unendlichen unendlich gross werden.

Die Gleichung 19) lässt sich durch eine Reihe von folgender Form integriren:

$$\alpha = c\,(1 + a_1\beta + a_2\beta^2 + \ldots)\log\beta + \frac{b}{\beta} + b_0 + b_1\beta + b_2\beta^2 + \ldots,$$

deren Coefficienten

$$c = \frac{bm^2}{4}, \quad 2b_1 = \frac{b_0 m^2 - kb}{4} - 3a_1 c, \quad 2.3b_2 = \frac{b_1 m^2 - kb_0}{4} - 5a_2 c$$

u. s. w. sind.

Die beiden Constanten b und b_0 sind willkürlich.

Für $\varrho = \sqrt{\beta} = 0$ wird α unendlich, für den inneren Raum muss daher b und somit auch c verschwinden.

Das Verhalten im Unendlichen lässt sich leicht bestimmen. Wird $\sqrt{\beta}$ sehr gross, so verschwindet in der Differentialgleichung m^2 gegen $k\beta$ und wir haben

$$\beta\frac{d^2\alpha}{d\beta^2} + 2\frac{d\alpha}{d\beta} + \frac{k}{4}\alpha\beta = 0,$$

deren allgemeines Integral

$$\alpha = \frac{C\sin\frac{1}{2}\sqrt{k\beta} - C'\cos\frac{1}{2}\sqrt{k\beta}}{\beta} \quad \text{ist.}$$

Es ist also

$$\begin{aligned}
\varphi &= C\sin\tfrac{1}{2}\sqrt{k}\varrho^2 - C'\cos\tfrac{1}{2}\sqrt{k}\varrho^2 \\
\frac{d\varphi}{d\varrho} &= \sqrt{k}\varrho\left\{C\cos\tfrac{1}{2}\sqrt{k}\varrho^2 + C'\sin\tfrac{1}{2}\sqrt{k}\varrho^2\right\} \\
\mathfrak{r} &= \frac{m\cos mz}{\varrho}\left\{C\sin\tfrac{1}{2}\sqrt{k}\varrho^2 - C'\cos\tfrac{1}{2}\sqrt{k}\varrho^2\right\} \\
-w &= \sqrt{k}\sin mz\left\{C\cos\tfrac{1}{2}\sqrt{k}\varrho^2 + C'\sin\tfrac{1}{2}\sqrt{k}\varrho^2\right\}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Ist die Höhe des betrachteten Cylinders h gross gegen den Radius des Cylinders $\varrho = R$, an dem die Unstetigkeit der Drehungsgeschwindigkeit stattfindet, so gelten die gewonnenen Ausdrücke im inneren Cylinder in der Nähe der Grenzfläche. Da aber $\mathfrak{r}$ für $\varrho = 0$ unendlich werden würde, so muss für den inneren Raum C' verschwinden. Die Ausdrucke 20) gelten auch für den äusseren Cylinder, wenn der Radius der Cylinderfläche, die diesen begrenzt, $\varrho = \mathfrak{R}$, so klein ist, dass $\frac{1}{h^2}$ gegen $\frac{4}{\mathfrak{R}^2 - R^2}$ vernachlässigt werden kann.

Wir beschränken uns auf die Behandlung dieses Falles.

Da der Druck innen und aussen für $\varrho = R$ denselben Werth haben muss, so muss, wenn wir mit dem Index 1 den inneren, mit 2 den äusseren Raum bezeichnen, nach 15)

$$\left(\frac{d\varphi_1}{d\varrho}\right)^2 \frac{1}{R^2} + k_1 \varphi_1^2 = \left(\frac{d\varphi_2}{d\varrho}\right)^2 \frac{1}{R^2} + k_1 \varphi_2^2.$$

Durch diese Gleichung wird der constante Factor im Werthe von φ_1 durch den von φ_2 bestimmt, so dass die Geschwindigkeit im inneren Raum durch die im äusseren bestimmt ist. Dagegen bleibt das Vorzeichen gleichgiltig. Es kann also die Geschwindigkeit aussen die entgegengesetzte Richtung wie innen haben.

Es verschwindet $\mathfrak{r}_1$ für $\varrho = 0$. $\mathfrak{r}_1$ soll ausserdem für $\varrho = R$, $\mathfrak{r}_2$ soll für $\varrho = R$ und $\varrho = \mathfrak{R}$ verschwinden.

Daraus folgt

$$\sin \tfrac{1}{2} \sqrt{k_1} R^2 = 0, \qquad \tfrac{1}{2} \sqrt{k_1}\, R^2 = \pi, \qquad \sqrt{k_1} = \frac{2\pi}{R^2},$$

ferner

$$C_2 \sin \tfrac{1}{2} \sqrt{k_2} R^2 - C_2' \cos \tfrac{1}{2} \sqrt{k_2}\, \mathfrak{R}^2 = 0$$

$$C_2 \sin \tfrac{1}{2} \sqrt{k_2}\, \mathfrak{R}^2 - C_2' \cos \tfrac{1}{2} \sqrt{k_2}\, \mathfrak{R}^2 = 0,$$

also

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \sqrt{k_2} R^2 = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \sqrt{k_2}\, \mathfrak{R}^2$$

$$\tfrac{1}{2} \sqrt{k_2}\, \mathfrak{R}^2 = \tfrac{1}{2} \sqrt{k_2} R^2 + \pi$$

$$\sqrt{k_2} = \frac{2\pi}{\mathfrak{R}^2 - R^2}.$$

Aus der Druckgleichung folgt

$$(C_2^2 + C'^2_2)\, k_2 = C_1^2 k_1, \qquad C_1 = C_2 \frac{R^2}{(\mathfrak{R}^2 - R^2) \cos \frac{R^2 \pi}{\mathfrak{R}^2 - R^2}}.$$

Es sind also alle Grössen bis auf C_2, welches die absolute Geschwindigkeit bestimmt, durch R, $\mathfrak{R}$ und m ausgedrückt. Die zwischen der Cylinderfläche ϱ und $\varrho = R$ aufsteigende Flüssigkeitsmenge ist

$$2\pi \int_R^\varrho w \varrho d\varrho = 2\pi (\psi_R - \psi_\varrho),$$

die durch die Cylinderfläche zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = z$ strömende

$$2\pi \int_0^z \varrho \mathfrak{r} dz = 2\pi (\psi_z - \psi_0).$$

Es bildet also die axiale und radiale Bewegung im äusseren und inneren Raume zwei Systeme, die für sich abgeschlossen sind, da keine Flüssigkeit durch die Unstetigkeitsfläche gehen darf. In der Nähe dieser Grenze steigt die Flüssigkeit auf oder sinkt herab. In der Nähe der Cylinderaxe findet dem entsprechend ein Herabsinken oder Aufsteigen statt. Im äusseren Raume bei

$$\varrho = \sqrt{\frac{\mathfrak{R}^2 - R^2}{2}},$$

im inneren bei

$$\varrho = \frac{R}{\sqrt{2}},$$

ist die Verticalgeschwindigkeit Null. Durch das Hinzukommen der Drehungsgeschwindigkeit bewegt sich die Flüssigkeit in Spirallinien auf das Centrum zu oder von ihm fort.

Wenn die Drehungsgeschwindigkeit $\mathfrak{y}$ von z abhängt, so beeinflusst sie die axialen und radialen Strömungen. Es giebt dann die dritte der Gleichungen 10)

$$\mathfrak{r} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho^2 \mathfrak{y}) + w \frac{\partial}{\partial z} (\varrho^2 \mathfrak{y}) = 0$$

oder

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho^2 \mathfrak{y}) - \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} \frac{\partial}{\partial z} (\varrho^2 \mathfrak{y}) = 0.$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn wir $\varrho^2 \mathfrak{y} = f(\psi)$ setzen, wo f eine beliebige Function von ψ ist. Differenziren wir jetzt die erste der Gleichungen 10) nach z, die zweite nach ϱ, und substrahiren, so erhalten wir

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \psi}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)\right) - \frac{2f(\psi)}{\varrho^3}\frac{df}{d\psi}\right]$$

$$- \frac{\partial \psi}{\partial \varrho}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \psi}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)\right]. \qquad 21)$$

Setzen wir $f(\psi) = a\psi$, um den einfachsten Fall zu behandeln, $\psi = \varphi x - \chi$, wo φ und χ nur von ϱ abhängen, so ist

$$\frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \psi}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right) = \frac{x}{\varrho^2}\left(\frac{d^2 \varphi}{d\varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{d\varphi}{d\varrho}\right) - \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{d^2 \chi}{d\varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{d\chi}{d\varrho}\right)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \varphi, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} = \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} x - \frac{d\chi}{d\varrho}.$$

Die Gleichung 21) wird also in zwei Theile zerfallen, von denen der eine den Factor x hat, der andere nur von ϱ abhängt. Jeder muss für sich verschwinden nämlich:

$$x\left\{\varphi \frac{d}{d\varrho}\left[\frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{d^2\varphi}{d\varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{d\varphi}{d\varrho}\right)\right] - \frac{d\varphi}{d\varrho}\frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{d^2\varphi}{d\varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{d\varphi}{d\varrho}\right) - \frac{2a^2\varphi^2}{\varrho^3}\right\} = 0$$

und

$$-\varphi \frac{d}{d\varrho}\left[\frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{d^2\chi}{d\varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{d\chi}{d\varrho}\right)\right] + \frac{d\chi}{d\varrho}\frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{d^2\varphi}{d\varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{d\varphi}{d\varrho}\right) + \frac{2a^2\varphi\chi}{\varrho^3} = 0.$$

Die erste Gleichung lässt sich schreiben

$$\varphi \frac{d}{d\varrho}\left\{\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\varphi}{d\varrho}\right)\right\} - \frac{d\varphi}{d\varrho}\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\varphi}{d\varrho}\right) - \frac{2a^2\varphi^2}{\varrho^3} = 0$$

oder

$$\varphi^2 \frac{d}{d\varrho}\left\{\frac{\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\varphi}{d\varrho}\right)}{\varphi}\right\} - \frac{2a^2\varphi^2}{\varrho^3} = 0.$$

Lässt man den gemeinschaftlichen Factor φ^2 fort und integrirt, so erhält man

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\varphi}{d\varrho}\right) + \frac{a^2\varphi}{\varrho^2} = 0$$

oder

$$\frac{d^2\varphi}{d\varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{d\varphi}{d\varrho} + a^2\varphi = 0.$$

Wir können also die zweite Differentialgleichung schreiben

$$-\varphi \frac{d}{d\varrho}\left[\frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{d^2\chi}{d\varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{d\chi}{d\varrho}\right)\right] - \frac{d\chi}{d\varrho}\frac{a^2\varphi}{\varrho^2} + \frac{2a^2\varphi\chi}{\varrho^3} = 0$$

oder

$$\frac{d}{d\varrho}\left[\frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{d^2\chi}{d\varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{d\chi}{d\varrho}\right)\right] + a^2\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{\chi}{\varrho^2}\right) = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich nach ϱ integriren und wir erhalten

$$\frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{d^2\chi}{d\varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{d\chi}{d\varrho}\right) + \frac{a^2\chi}{\varrho^2} = \text{const.}$$

Einen Specialfall erhalten wir, wenn wir const $= 0$ setzen. Dann genügt φ und χ derselben Differentialgleichung. Wir können also setzen

$$\psi = \varphi\,(z - B),$$

wo B eine Constante bezeichnet.

Dann ist $\psi = 0$ für $z = B$, die Flüssigkeit strömt parallel der Ebene $z = B$.

Die Differentialgleichung zur Bestimmung von φ lässt sich schreiben, wenn wir

$$\varphi = \sqrt{\varrho}\,\varphi_1\,,$$

also

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d\varphi}{d\varrho} = \frac{d\varphi_1}{d\varrho}\frac{1}{\sqrt{\varrho}} + \frac{1}{2}\frac{\varphi_1}{(\sqrt{\varrho})^3}$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\varrho^2} = \sqrt{\varrho}\,\frac{d^2\varphi_1}{d\varrho^2} + \frac{d\varphi_1}{d\varrho}\frac{1}{\sqrt{\varrho}} - \frac{1}{4}\frac{\varphi_1}{(\sqrt{\varrho})^3}$$

setzen

$$\frac{d^2\varphi_1}{d\varrho^2} + \left(a^2 - \frac{3}{4}\frac{1}{\varrho^2}\right)\varphi_1 = 0.$$

Für unendlich wachsendes ϱ geht die Gleichung über in

$$\frac{d^2\varphi_1}{d\varrho^2} + a^2\varphi_1 = 0,$$

deren allgemeines Integral

$$C_1 \cos a\varrho + C_2 \sin a\varrho \text{ ist.}$$

Für unendliches ϱ würde also

$$w = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho}$$

$$= -(z - B)\left(\frac{1}{2}\,\frac{C_1 \cos a\varrho + C_2 \sin a\varrho}{(\sqrt{\varrho})^3} - \frac{aC_1 \sin a\varrho - aC_2 \cos a\varrho}{\sqrt{\varrho}}\right)$$

sein und daher verschwinden, ebenso wie

$$\mathfrak{r} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{C_1 \cos a\varrho + C_2 \sin a\varrho}{\sqrt{\varrho}}.$$

Ein particuläres Integral der Differentialgleichung lässt sich durch eine unendliche Reihe gewinnen.

Wir haben, wenn C eine neue Constante bezeichnet

$$\varphi = C\varrho^2 \left(1 - \frac{a^2\varrho^2}{2.4} + \frac{a^4\varrho^4}{2.4.4.6} - \frac{a^6\varrho^6}{2.4.4.6.6.8} + - \ldots\right).$$

Das zweite particuläre Integral wird für $\varrho = 0$ unendlich und für unseren Zweck unbrauchbar.

Es ist also für $\varrho = 0$

$$w = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho} = -2C \text{ und } \mathfrak{r} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0.$$

Die Gleichung der Stromlinien lautet

$$\varphi\,(z - B) = \text{const.}$$

Da φ für $\varrho = 0$ verschwindet, so folgt, dass alle im Endlichen liegenden Stromlinien, für die die Constante endlich ist, für $z = \infty$ sich der z-Axe asymptotisch nähern.

Ausserdem verschwindet φ für unendlich viele Werthe von ϱ. Ist der kleinste Werth $\varrho = \varrho_0$, so nähern sich alle Stromlinien für $z = \infty$ dieser Cylinderfläche asymptotisch.

Die Drehungsgeschwindigkeit

$$\mathfrak{y} = aC\left(1 - \frac{a^2\varrho^2}{2.4} = \frac{a^4\varrho^4}{2.4.4.6}\cdots\right)(z - B)$$

ist also für $\varrho = 0$ endlich und sie verschwindet für $z = B$. Sie nimmt proportional dem Abstande von der Ebene $z = B$ zu. Die Constante a bestimmt den Werth ϱ_0 und ihr ist die Drehungsgeschwindigkeit proportional. Setzen wir $a\varrho = \gamma$, so ist $a\varrho_0 = \gamma_0$ die kleinste Wurzel der Gleichung

$$0 = 1 - \frac{\gamma^2}{2.4} + \frac{\gamma^4}{2.4.4.6}\cdots$$

Es ist also dann

$$\mathfrak{r} = \frac{C\gamma}{a}\left(1 - \frac{\gamma^2}{2.4} + \frac{\gamma^4}{2.4.4.6} - \cdots\right)$$

$$w = -\frac{C}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\left[\left(1 - \frac{\gamma^2}{2.4} + \frac{\gamma^4}{2.4.4.6}\cdots\right)\gamma^2\right](z - B)$$

$$\mathfrak{y} = aC\,(z - B)\left\{1 - \frac{\gamma^2}{2.4} + \frac{\gamma^4}{2.4.4.6} - \cdots\right\}.$$

Durch Vergrösserung der Constante C werden alle drei Geschwindigkeiten in demselben Verhältnisse grösser. Aendert man

aber a, so ändert sich $\varrho_0 = \frac{\gamma_0}{a}$. Für $\gamma = \gamma_0$ verschwinden $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$. Hier kann also die Flüssigkeit durch eine verticale Cylinderfläche vom Radius ϱ_0 abgeschlossen werden, innerhalb dessen sich die ganze Bewegung abspielt. Dagegen verschwindet w nur für $z = B$. Unten wird die Flüssigkeit durch eine horizontale Ebene abgeschlossen, während sie nach oben hin in der Nähe der Begrenzungsfläche ein und in der Nähe der Axe ausströmt.

Wird nun a kleiner, so wird ϱ_0 grösser, $\mathfrak{x}$ grösser, $\mathfrak{y}$ in demselben Verhältniss kleiner, w bleibt constant.

Bei gleichbleibenden Werthen der Verticalströmung nimmt bei grösser werdendem Radius der Cyklone die Radialströmung in demselben Verhältniss zu, die Drehungsgeschwindigkeit im umgekehrten Verhältnis ab.

Für den Druck ergiebt sich

$$\mathfrak{B} - P = -\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi^2}{\varrho^2}\right) + \left(\frac{z^2}{2} - Bz\right)\left[\frac{a^2\varphi^2}{\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{d\varphi}{d\varrho}\right)^2\right] - B^2\int\frac{\varphi^2 d\varrho}{\varrho^3}.$$

Ein anderes Beispiel für den Einfluss der Drehungsbewegung um die Cylinderaxe auf die radiale und axiale Bewegung ist das folgende.

Wir setzen

$$\psi = \mathfrak{A}\varrho^2 \sin nz.$$

Dann ist

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -n^2 \sin nz\, \varrho^2$$

und die Gleichung 21) giebt

$$-2a^2 \sin nz \cos nz\, \varrho\mathfrak{A}^2 n + 2\mathfrak{A}^2 n^3 \sin nz \cos nz\, \varrho = 0,$$

woraus $a = n$ folgt.

Für den Druck ergiebt sich

$$\mathfrak{B} - P = -\mathfrak{A}^2 \cos 2nz + \frac{\mathfrak{A}^2\varrho^2 n^2}{2} + \text{const},$$

für $z = 0$ und $nz = \pi$ ist $\psi = 0$. Hier strömt die Flüssigkeit parallel den beiden Ebenen.

Die Stromlinien $\psi = \text{const}$, soweit sie im Endlichen liegen, nähern sich für $\varrho = \infty$ asymptotisch sowohl der Ebene $z = 0$ als auch $z = \frac{\pi}{n}$. Im Unendlichen wird also die axiale Strömung unendlich

gross, weil sich dort alle Stromlinien zusammendrängen. Die Drehungsgeschwindigkeit ist

$$\mathfrak{y} = a\,\mathfrak{A} \sin nz = n\,\mathfrak{A} \sin nz\,.$$

Die radiale Geschwindigkeit ist

$$\mathfrak{r} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial z} = n\,\mathfrak{A}\varrho \cos nz\,,$$

die axiale

$$w = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho} = -\,2\,\mathfrak{A} \sin nz\,.$$

Das Verhältniss der axialen Geschwindigkeit zur Drehungsgeschwindigkeit ist dem Abstand der beiden Ebenen von rein radialer Strömung proportional.

Die Höhe dieser Cyklone $z = \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{a}$ nimmt zu, wenn a kleiner wird, gleichzeitig wird $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{y}$ kleiner, während w constant bleibt.

Bei gleichbleibenden Werthen der Verticalströmung nimmt mit zunehmender Höhe der Cyklone die Radialströmung und die Drehungsgeschwindigkeit in demselben Verhältniss ab.

Die Stromlinien sind in Fig. 4 gezeichnet.

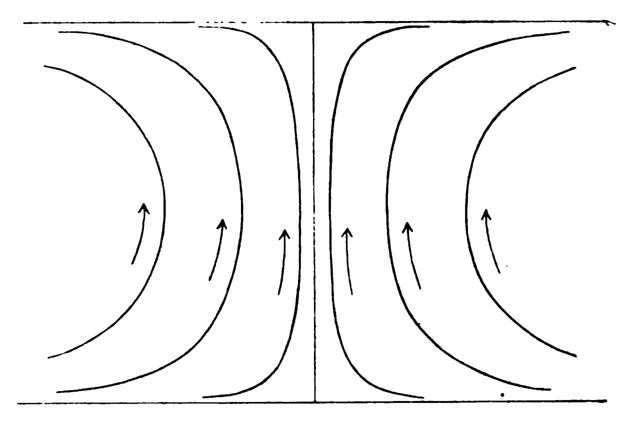


Fig. 4. Stromlinien einer Cyklone mit horizontaler Ausströmung.

Wir wollen jetzt ein Beispiel von geraden Wirbellinien geben, wo die Drehungsgeschwindigkeit überall constant ist. Dies Beispiel wird ausserdem zeigen, dass sich die Form von Clebsch für die Geschwindigkeit noch in anderer Weise erreichen lässt.

so wird die Gleichung

$$\frac{d^2\varphi}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{d\varphi}{d\varrho} - \left(\frac{m^2}{\varrho^2} - \varkappa\right)\varphi = 0.$$

Hier schreiben wir $\varrho'^2 = \varkappa\varrho^2$
und erhalten

$$\frac{d^2\varphi}{d\varrho'^2} + \frac{1}{\varrho'}\frac{d\varphi}{d\varrho'} - \left(\frac{m^2}{\varrho'^2} - 1\right)\varphi = 0.$$

Diese Gleichung wird durch Bessel'sche Functionen integrirt und zwar ist

$$\varphi = \varrho'^m \left[c\, J_m(\varrho') + c_1\, \mathfrak{J}_m(\varrho')\right],$$

wo c und c_1 Constanten bedeuten.

Hier ist

$$J_m(\varrho') = \left(1 - \frac{\varrho'^2}{2(2m+2)} + \frac{\varrho'^4}{2.4.(2m+2)(2m+4)} + \cdots\right)$$

$$\mathfrak{J}_m(\varrho') = \frac{d^m \mathfrak{J}(\varrho')}{d(\varrho'^2)^m}.$$

$$\mathfrak{J}(\varrho') = J_0(\varrho')\left[\log\frac{\varrho'}{2} - 0{,}5772157\right] + 2\left[J_2(\varrho') - \tfrac{1}{2}J_4(\varrho') + \tfrac{1}{3}J_6(\varrho')\cdots\right]$$

Das Integral $J_m(\varrho')$ bleibt für $\varrho' = 0$ endlich und verschwindet im Unendlichen. Das Integral $\mathfrak{J}_m(\varrho')$ wird für $\varrho = 0$ unendlich und verschwindet ebenfalls im Unendlichen. Beide Integrale verschwinden ausserdem für unendlich viele Werthe von ϱ'.

Die Darstellung von $\mathfrak{J}_m(\varrho')$ als $m$ter Differentialquotient gilt natürlich nur für ganzzahlige m. Da die Geschwindigkeiten wieder dieselben Werthe annehmen müssen, wenn ϑ einen Umlauf gemacht hat, so haben nur ganzzahlige Werthe von m physikalische Bedeutung.

Wir können die Bewegung in einen endlichen Cylinder mit festen Wänden eingeschlossen denken, müssen dann aber die Constante c_1 gleich Null setzen. An der Wand des Cylinders muss $\mathfrak{r}$ verschwinden. Also muss dort $J_m(\varrho')$ Null sein. Man hat hierfür die kleinste Wurzel der Gleichung $J_m(\varrho') = 0$ zu wählen. Ist der Radius R gegeben, so bestimmt sich hieraus die Constante $\varkappa$.

Für $m = 1$ zerlegt sich der Cylinder in zwei gleiche Hälften, in denen die Stromlinien in sich zurücklaufen. Für $m = 2$ laufen die Stromlinien in jedem Quadranten in sich zurück. Bei grösseren

Werthen von m erhält man immer kleinere Gebiete in sich zuzückkehrender Strömungen. Nimmt man beide Integrale zu Hülfe, so kann man die Bewegung zwischen zwei concentrische Cylinderflächen einschliessen.

An beiden muss dann $(c J_m[\varrho'] + c_1 \mathfrak{J}_m[\varrho'])$ Null sein.

Die grosse Vereinfachung, welche in dem Falle, wo keine Drehungen der Flüssigkeitstheilchen vorhanden sind, die hydrodynamischen Gleichungen erfahren, so dass man sich nur mit der einen Continuitätsgleichung zu beschäftigen braucht, hat die früheren Mathematiker veranlasst, sich nur mit den so vereinfachten Problemen zu befassen. Erst Helmholtz hat in seiner berühmten Abhandlung über die Wirbelbewegungen (Crelle's Journal Bd. 55) auch solche Bewegungen, bei denen Drehungen vorkommen, aus den allgemeinen Gleichungen abgeleitet. Der wesentliche Fortschritt der Helmholtz'schen Behandlungsweise lag in der ausgiebigen Anwendung der in der Mitte des Jahrhunderts ausgebildeten Potentialtheorie. Naturgemäss treten hierdurch der Hydrodynamik ursprünglich fremde, der Vorstellung von Fernkräften entnommene Begriffe in den Vordergrund.

Ueber die Strenge des Beweises der Folgerungen S. 56 vgl. Stokes (Math. and Phys. Papers II S. 18, 1883).

Weitere Specialuntersuchungen über Wirbelbewegungen sind angestellt von W. Thomson (On the vibration of on columnar vortex; Phil. Mag. Sept. 1880); Greenhill (On plane vortex motion; Quart. Journ. Math. XV, 1877); Love (On the stability of certain vortex motions; Proc. London math. soc. XXV, 1893); Reusch (Ueber Ringbildung in Flüssigkeiten; Pogg. Ann. 110, 1860); J. J. Thomson (On the motion of vortex rings; London 1883); Kirchhoff (Ein elliptischer Wirbelcylinder; Mechanik S. 263); Hicks (On the steady motion and the small vibrations of a hollow vortex; Phil. Transact., 1884; On a spherical vortex; Phil. Transact., 1894).

Die Theorie der Wirbelatome, die auf den entwickelten Gesetzen der Wirbelbewegung beruht, ist von W. Thomson aufgestellt (Phil. Mag. Juli 1887).

III. Strömungen ohne Drehung der Flüssigkeitstheilchen.

§ 1.

Stetige Bewegungen.

Die Untersuchung der Bewegung unzusammendrückbarer Flüssigkeiten wird erheblich vereinfacht, wenn keine Drehungen der Flüssigkeitstheilchen vorhanden sind. Es folgen dann nämlich aus Gleichung 13) des ersten Abschnitts die Gleichungen

$$0 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Diese Gleichungen sind gleichbedeutend mit der Existenz einer Function φ, so dass

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

ist, wie auch aus den Gleichungen 33) Abschnitt I folgt, da ψ und χ verschwinden. Die Function φ nennen wir Geschwindigkeitspotential.

Die Continuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

geht über in die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi = 0.$$

Die Clebsch-Transformation zeigt, dass die allgemeinen Gleichungen ohne weiteres integrabel sind, indem die Gleichung 35) des ersten Abschnitts jetzt

$$\mathfrak{V} - \frac{p}{s} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] \qquad 2)$$

wird. Wir schreiben jetzt $\mathfrak{V}$ für V.

Alle Untersuchungen solcher Strömungen beschränken sich daher auf die Behandlung der Gleichung

$$\Delta \varphi = 0$$

und die Erfüllung der Grenzbedingungen.

Da diese Gleichung die in der Potentialtheorie vorkommende ist, so sind auch die oben entwickelten Sätze dieser Theorie ohne weiteres auf hydrodynamische Probleme anwendbar.

Ein Beispiel bietet der Green'sche Satz Gleichung 40) Abschnitt I. Setzen wir $U = \varphi$, $V = \text{const}$, so ist hiernach mit Berücksichtigung von $\Delta \varphi = 0$

$$\int dS \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0. \qquad 3)$$

Diese Gleichung sagt uns, dass in einen geschlossenen Raum ebensoviel Flüssigkeit aus- wie einströmt.

Aus dem Green'schen Satz folgt weiter, wenn wir $\varphi = U = V$ setzen

$$\int\int\int dx\,dy\,dz \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] = \int dS\, \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}. \qquad 4)$$

Wird an der Oberfläche $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$, so verschwindet das Integral auf der rechten Seite. Es muss auch die linke verschwinden. Da diese eine Summe von Quadraten enthält, muss jedes Glied verschwinden, d. h. im Innern der Flüssigkeit ist keine Bewegung vorhanden. Wenn in einem einfach zusammenhängenden Raum Bewegungen der Flüssigkeit vorkommen, ohne dass Unstetigkeiten der Geschwindigkeit vorhanden sind, so muss an der Oberfläche eine Bewegung parallel der Normale vorhanden sein.

Dieser Schluss ist nicht ohne weiteres zulässig, wenn die Oberfläche des geschlossenen Raumes unendlich gross ist. Für diesen Fall folgt aus der Gleichung

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 0,$$

wenn man die Integration über eine unendlich grosse Kugelfläche vom Radius R und eine beliebige im Endlichen liegende Fläche ausdehnt, dass das Integral über die Kugelfläche ausgedehnt einen endlichen Werth haben muss. Es muss also, da die Kugelfläche von der Ordnung R^2 unendlich wird, $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ von der Ordnung $\frac{1}{R^2}$ an dieser Fläche sein, dann ist φ von der Ordnung $\frac{1}{R}$ und es verschwindet

$$\int dS\,\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}$$

ausgedehnt über eine unendlich grosse Kugelfläche. Wenn daher die Flüssigkeit im Unendlichen ruht, so kann eine Bewegung in derselben nur durch bewegte Oberflächen hervorgerufen werden.

Dagegen können in sich zurücklaufende Strömungen in mehrfach zusammenhängenden Räumen vorkommen, wo φ vieldeutig wird. Werden diese Räume durch Querschnitte in einfach zusammenhängende zerlegt, so finden dabei Strömungen durch diese Querschnitte statt.

So ist das Potential einer Doppelschicht Gleichung 39) Abschnitt I an dieser Doppelschicht unstetig, während die Differentialquotienten stetig sind. Das Potential ist daher vieldeutig und stellt als Geschwindigkeitspotential eine in sich zurücklaufende Strömung dar.

Die Folgerung, dass keine Bewegung der Flüssigkeit, solange sie unbegrenzt ist, erfolgen kann, wenn im Unendlichen die Geschwindigkeiten Null sind, gilt nur, wenn das Geschwindigkeitspotential und seine Differentialquotienten überall stetig und endlich sind.

Setzen wir dagegen z. B.

$$\varphi = \frac{a}{r}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

so haben wir für die Componenten der Geschwindigkeit

$$u = -\frac{x}{r^3}\,a, \qquad v = -\frac{y}{r^3}\,a, \qquad w = -\frac{z}{r^3}\,a. \tag{5)}$$

Wir haben dann Strömungen, die radial vom Punkte $r = 0$ ausgehen. Für $r = \infty$ verschwinden u, v, w. Im Punkte $r = 0$ sind die Geschwindigkeiten aber unendlich. Wir haben hier einen Ein- oder Ausströmungspunkt der Flüssigkeit. Durch jede Kugelfläche strömt dieselbe Flüssigkeitsmenge $4\pi a$.

Setzen wir

$$\varrho = \sqrt{y^2 + z^2}, \qquad \varphi = a \log \varrho, \tag{5a}$$

so ist $\Delta\varphi = 0$ und

$$u = 0, \qquad v = \frac{ay}{\varrho^2}, \qquad w = \frac{az}{\varrho^2}.$$

Hier haben wir ein Aus- oder Einströmen der Flüssigkeit auf der Linie $\varrho = 0$. Durch jede Cylinderfläche von der Länge Eins strömt die Flüssigkeitsmenge $2\pi a$.

Ein unendlich langer Cylinder mit kreisförmigem Querschnitt in eine strömende Flüssigkeit getaucht, giebt den Stromlinien eine sehr einfache Gestalt. Die Flüssigkeit soll im Unendlichen mit der Geschwindigkeit a strömen. Das Geschwindigkeitspotential muss dann das Glied az enthalten, wenn die Strömung parallel der z-Axe erfolgt. Führen wir Cylindercoordinaten ein, so haben wir

$$\varphi = (\varphi_1 + a\varrho) \cos \vartheta,$$

wo φ_1 nur von ϱ abhängt. Die Gleichungen $\Delta\varphi = 0$ giebt $\varphi_1 = \frac{c}{\varrho}$, da φ_1 für $\varrho = \infty$ verschwinden muss. Für $\varrho = R$ muss $\frac{\delta\varphi}{\delta\varrho} = 0$ sein. Also ist $c = aR^2$.

$$\varphi = a\left(\frac{R^2}{\varrho} + \varrho\right) \cos \vartheta.$$

Ueber diese Strömungen können sich noch in sich zurücklaufende überlagern. Setzen wir

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{z}, \text{ so ist } \Delta\varphi = 0.$$

Dann ist $\psi = \log \varrho$. Die Stromlinien sind daher concentrische Kreise um die Cylinderaxe.

Das Geschwindigkeitspotential ändert bei jedem Umlauf seinen Werth sprungweise um 2π.

Für alle Flüssigkeitsbewegungen, die parallel einer Ebene vor sich gehen und bei denen ein Geschwindigkeitspotential vorhanden ist, tritt eine grosse Vereinfachung der Darstellung ein durch Anwendung von Functionen eines complexen Arguments. Wenn wir die Beziehung haben

$$\varphi + \psi i = F(x + iy),$$

so ist auch $x + iy$ eine Function von $\varphi + \psi i$.

Aus der Functionentheorie folgt dann

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{6}$$

und hieraus weiter

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2}. \tag{7}$$

Wenn φ das Geschwindigkeitspotential in einer Flüssigkeit bezeichnet, so ist die Continuitätsgleichung von selbst durch diese Beziehung erfüllt. Die Function ψ ist die Strömungsfunction. Aus der letzten eben abgeleiteten Gleichung folgt, dass die Linien $\varphi = \text{const}$ und $\psi = \text{const}$ sich senkrecht schneiden. Da nun die Flüssigkeit senkrecht zu den Linien $\varphi = \text{const}$ strömt, so stellen die Linien $\psi = \text{const}$ die Stromlinien dar.

Bei dieser Darstellung hat man die Functionen des complexen Arguments so zu wählen, dass die Grenzbedingungen erfüllt sind.

In sich zurücklaufende Strömungen zwischen concentrischen elliptischen Cylindern erhalten wir in folgender Weise.

Wir setzen

$$b \cos \beta (\varphi + \psi i) = x + yi.$$

Dann ist

$$\frac{x^2}{b^2\left(\frac{e^{\beta\psi} + e^{-\beta\psi}}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{b^2\left(\frac{e^{\beta\psi} - e^{-\beta\psi}}{2}\right)^2} = 1.$$

$$\frac{x^2}{b^2 \cos^2 \beta\varphi} - \frac{y^2}{b^2 \sin^2 \beta\varphi} = 1.$$

Die Linien $\psi = \text{const}$ sind also Ellipsen mit den Halbaxen

$$\frac{b\,(e^{\beta\psi} + e^{-\beta\psi})}{2}, \qquad \frac{b\,(e^{\beta\psi} - e^{-\beta\psi})}{2}.$$

Die Linien $\varphi = \text{const}$ sind orthogonale Hyperbeln. Die Stromlinien sind also in sich zurücklaufende Ellipsen und das Geschwindigkeitspotential φ ändert bei jedem Umlauf seinen Wert sprungweise um 2π.

Für $\psi = \infty$ geht die Ellipse in einen Kreis mit unendlichem Radius über. Die Geschwindigkeit wird für $\psi = \infty$

$$= \frac{2}{b\beta} e^{-\beta\psi}.$$

Für $\psi = 0$ geht die Ellipse in eine gerade Strecke von der Länge b über. Die Endpunkte entsprechen den Werten $\psi = 0$, $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$. Hier wird die Geschwindigkeit unendlich gross.

Die Benutzung elliptischer Coordinaten führt zu Strömungen, die senkrecht zu Flächen zweiten Grades erfolgen.

Wir gehen von der Differentialgleichung aus Gleichung 61) Abschnitt I

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\frac{\partial^2\varphi}{\partial e_1^2} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)\frac{\partial^2\varphi}{\partial e_2^2} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial e_3^2} = 0. \tag{8}$$

Setzt man zunächst $\varphi = e_1$ const, so ist die Gleichung erfüllt. Für die Gleichungen $\varepsilon_1 =$ const ist daher $e_1 =$ const und auch $\varphi =$ const. Die Stromlinien sind die Kurven, die die Flächen $\varepsilon_1 =$ const senkrecht schneiden. Dies sind die Schnittlinien der Flächen $\varepsilon_2 =$ const und $\varepsilon_3 =$ const.

Das Quadrat der Geschwindigkeit ist nach 57) und 60) Abschnitt I

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = \mathfrak{U}^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_1}\right)^2 = \mathfrak{U}^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial e_1}\frac{de_1}{d\varepsilon_1}\right)^2 = \frac{4}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)} \tag{9}$$

$$= \frac{4}{(a^2+\varepsilon_1)(b^2+\varepsilon_2)(c^2+\varepsilon_3)\left(\frac{x^2}{(a^2+\varepsilon_1)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\varepsilon_1)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\varepsilon_1)^2}\right)}.$$

Im Unendlichen ist $\varepsilon_1 = r^2$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, die Geschwindigkeit ist dort also gleich

$$\frac{2\,\text{const}}{r^2}.$$

Man kann diesen Ausdruck benutzen, um die Strömung durch eine elliptische Oeffnung zu bestimmen. Für den Grenzwerth $\varepsilon_1 = -c^2$ erhielten wir die Ellipse

$$z = 0, \qquad \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1, \tag{10}$$

während der übrige Theil der xy-Ebene durch $\varepsilon_2 = -c^2$ dargestellt wurde. Dieser Theil kann durch eine feste Wand gebildet werden, weil die Stromlinien seine Schnittlinien mit den Flächen $\varepsilon_3 =$ const sind.

In der Oeffnung ist $z = 0$. Dort sind also ε_2 und ε_3 die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\varepsilon} + \frac{y^2}{b^2+\varepsilon} = 1,$$

Es ist daher

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_3 = -(a^2 + b^2) + x^2 + y^2$$
$$\varepsilon_2 \varepsilon_3 = a^2 b^2 - x^2 b^2 - y^2 a^2.$$

Das Quadrat der Geschwindigkeit ist nach 9)

$$= \frac{4}{c^4 - c^2 [a^2 + b^2 - (x^2 + y^2)] + a^2 b^2 - x^2 b^2 - y^2 a^2}\,.$$

Für die Ellipse, welche den Rand der Oeffnung bildet, deren Gleichung lautet

$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1\,,$$

verschwindet der Nenner; am Rande wird die Geschwindigkeit also unendlich. Es ist dies mathematisch dieselbe Aufgabe, wie die Vertheilung statischer Elektricität auf einer Scheibe, auf welche die elektrostatischen Kraftlinien von allen Seiten zulaufen. Für diese Kraftlinien treten hier die Stromlinien ein. Die Flüssigkeit strömt also von allen Seiten auf die elliptische Scheibe zu oder von ihr fort. Die Scheibe muss also die Flüssigkeit einsaugen oder ausströmen. Ohne diese Unstetigkeitsstelle würde in dem einfach zusammenhängenden Raume keine Bewegung möglich sein, da die Flüssigkeit im Unendlichen ruht.

Betrachtet man noch die Fälle bei denen

$$\varphi = e_2 \text{ und } \varphi = e_3 \text{ ist,}$$

so sind die Stromlinien die Schnittlinien der Hyperboloide mit den Ellipsoiden.

Ist $\varphi = e_2$, so sind die Stromlinien die Schnittlinien der Ellipsoide mit den zweischaligen Hyperboloiden. Wir können dann der Flüssigkeit einen zweifach zusammenhängenden Raum anweisen, der durch ein Ellipsoid und ein zweischaliges Hyperboloid begrenzt wird. Die Stromlinien sind dann in sich zurücklaufende Linien, die um das Ellipsoid herumlaufen. Das Quadrat der Geschwindigkeit ist

$$\frac{4}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}\,.$$

Sie wird unendlich für die Ellipse, welche die elliptische Scheibe begrenzt, und für die Hyperbel; im ersten Fall wird $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, im zweiten $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$. Sie liegen ausserhalb der Flüssigkeit. Die Be-

wegung der Flüssigkeit ist hier ohne Unstetigkeitsstelle möglich, weil sie einen zweifach zusammenhängenden Raum erfüllt.

Ist $\varphi = e_3$, so sind die Stromlinien die Schnittlinien der Ellipsoide mit dem einschaligen Hyperboloid. Wir erhalten dann einen zweifach zusammenhängenden Raum innerhalb jedes Hyperboloids.

Hier ist das Quadrat der Geschwindigkeit

$$\frac{4}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}.$$

Sie wird unendlich für die Hyperbel, für die $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ ist, die aber ausserhalb der Flüssigkeit liegt.

Wir gehen jetzt zur Behandlung der Strömung über, in der ein dreiaxiges Ellipsoid ruht.

Wir setzen

$$\varphi = x(c_1\chi - u_1), \tag{11}$$

c_1 und u_1 sind Constanten. χ soll in unendlicher Entfernung vom Ellipsoid verschwinden. Dann ist dort

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -u_1$$

die constante Geschwindigkeit der Strömung parallel der x-Axe.

Es folgt weiter

$$\frac{\Delta\varphi}{c_1} = x\Delta\chi + 2\frac{\partial\chi}{\partial x} = 0. \tag{12}$$

An der Oberfläche des Ellipsoids muss $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ verschwinden. Wir können dies mit Hülfe der elliptischen Coordinaten erreichen, wenn χ nur von ε_1 abhängt. Dann ist nach Gleichungen 47) und 56) Abschnitt I

$$\frac{\partial\chi}{\partial x} = \frac{d\chi}{d\varepsilon_1}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{U}^2 x}{a^2+\varepsilon_1}\frac{d\chi}{d\varepsilon_1},$$

also haben wir

$$\Delta\chi + \frac{\mathfrak{U}^2}{a^2+\varepsilon_1}\frac{d\chi}{d\varepsilon_1} = 0,$$

oder

$$\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}\left(\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{V}\mathfrak{W}}\frac{d\chi}{d\varepsilon_1}\right) + \frac{\mathfrak{U}^2}{a^2+\varepsilon_1}\frac{d\chi}{d\varepsilon_1} = 0. \tag{13}$$

Wir setzen nun

$$\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{V}\mathfrak{W}}\frac{d\chi}{d\varepsilon_1} = \chi_1\chi_2,$$

wo χ_1 nur von ε_1, χ_2 nur von ε_3 und ε_2 abhängt, dann haben wir nach 57) Abschnitt I

$$-\tfrac{1}{4}\,\frac{(a^2+\varepsilon_1)(b^2+\varepsilon_1)(c^2+\varepsilon_1)(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2}{(a^2+\varepsilon_2)(b^2+\varepsilon_2)(c^2+\varepsilon_2)(a^2+\varepsilon_3)(b^2+\varepsilon_3)(c^2+\varepsilon_3)}\left(\frac{d\chi}{d\varepsilon_1}\right)^2=\chi_1^2\,\chi_2^2\,,$$

nach 13) $\qquad \dfrac{d\chi_1}{d\varepsilon_1}=-\dfrac{1}{a^2+\varepsilon_1}\,\chi_1\,,\quad \chi_1=\dfrac{1}{a^2+\varepsilon_1}\,,$ also

$$\chi_2^2=-\tfrac{1}{4}\,\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2}{(a^2+\varepsilon_2)(b^2+\varepsilon_2)(c^2+\varepsilon_2)(a^2+\varepsilon_3)(b^2+\varepsilon_3)(c^2+\varepsilon_3)}.$$

Daher ist

$$\frac{d\chi}{d\varepsilon_1}=-\frac{1}{(a^2+\varepsilon_1)\sqrt{(a^2+\varepsilon_1)(b^2+\varepsilon_1)(c^2+\varepsilon_1)}}.$$

Für $\varepsilon=\infty$ ist $\chi=0$, also

$$\chi=\int_\infty^{\varepsilon_1}\frac{d\varepsilon_1}{(a^2+\varepsilon_1)\sqrt{(a^2+\varepsilon_1)(b^2+\varepsilon_1)(c^2+\varepsilon_1)}}. \qquad 14)$$

Das feste Ellipsoid, an dessen Oberfläche $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ verschwinden soll, sei durch $\varepsilon_1=0$ bestimmt. Also ist dort

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_1}=(c_1\chi-u_1)\frac{\partial x}{\partial\varepsilon_1}+c_1\,x\,\frac{\partial\chi}{\partial\varepsilon_1}=0\,,$$

also nach

$$2\,c_1\,\frac{d\chi}{d\varepsilon_1}=-\frac{c_1\chi-u_1)}{a^2+\varepsilon_1}$$

und für $\varepsilon_1=0$

$$\frac{c_1}{a^2}\int_0^\infty\frac{d\varepsilon_1}{(a^2+\varepsilon_1)\sqrt{(a^2+\varepsilon_1)(b^2+\varepsilon_1)(c^2+\varepsilon_1)}}=\frac{2c_1}{a^3bc}-\frac{u_1}{a^2}.$$

Setzen wir

$$abc\int_0^\infty\frac{d\varepsilon_1}{(a^2+\varepsilon_1)\sqrt{(a^2+\varepsilon_1)(b^2+\varepsilon_1)(c^2+\varepsilon_1)}}=A\,,$$

so ist

$$c_1=\frac{u_1\,abc}{2-A}\,,$$

und

$$\varphi=\frac{x\,u_1\,abc}{2-A}\left\{\int_\infty^{\varepsilon_1}\frac{d\varepsilon_1}{(a^2+\varepsilon_1)\sqrt{(a^2+\varepsilon_1)(b^2+\varepsilon_1)(c^2+\varepsilon_1)}}\right\}-x\,u_1. \qquad 15)$$

Haben wir es mit einem Rotationsellipsoid zu thun, dessen Symmetrieaxe der Strömung im Unendlichen parallel ist, so haben wir

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0\,.$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn wir

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}, \quad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

setzen, wo dann ψ der Gleichung

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0$$

genügen muss. Die Linien $\psi = \text{const}$ sind die Stromlinien.

Für die Kugel werden die Strömungen naturgemäss am einfachsten. Dann ist $a = b = c = R$ und

$$\begin{aligned} \varphi &= -x\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right)u_1\,, \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2\,, \\ \psi &= u_1\varrho^2\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Der Druck in der Flüssigkeit ist

$$\frac{p}{s} = \text{const} + \mathfrak{B} - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right].$$

Die Geschwindigkeit u_1 kann von der Zeit abhängen, wenn auf die Flüssigkeit beschleunigende Kräfte einwirken. Es sei

$$\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x} = -\mathfrak{E}\,,$$

für $r = \infty$ ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -u_1\,.$$

Da hier auf alle Flüssigkeitstheilchen dieselbe beschleunigende Kraft einwirkt und der Einfluss der Kugel verschwindet, so ist

$$-\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x} = -\mathfrak{E} = -\frac{\partial u_1}{\partial t}\,.$$

Legt man einen Schnitt durch die Symmetrieaxe, so wird die kreisförmige Schnittfläche der Kugel durch die Symmetrieaxe und die auf ihr senkrecht stehenden Linien in vier Quadranten zerlegt. An entsprechenden Punkten dieser Quadranten hat die

Geschwindigkeit an der Oberfläche dieselben absoluten Werthe. Die Druckkräfte auf die vier Quadranten, die von den Quadraten der Geschwindigkeiten herrühren, halten sich also im Gleichgewicht.

Für die Componenten der Druckkräfte auf die ganze Kugelfläche parallel den Coordinatenaxen bleiben also die Druckkräfte auf das Element dS

$$+ \frac{s}{2} \mathfrak{G}\, x\, dS$$

übrig. Um die Componenten selbst zu erhalten, haben wir mit dem Richtungscosinus

$$-\frac{x}{R},\ -\frac{y}{R},\ -\frac{z}{R}$$

zu multipliciren und über die Kugelfläche zu integriren. Wir erhalten dann

$$X = -\frac{s\mathfrak{G}}{2R}\int x^2\, dS$$

$$Y = -\frac{s\mathfrak{G}}{2R}\int xy\, dS$$

$$Z = -\frac{s\mathfrak{G}}{2R}\int xz\, dS.$$

Führen wir Polarcoordinaten ein, so ergeben die Integrationen

$$\int xy\, dS = \int xz\, dS = 0$$

$$X = -\frac{2\, s\mathfrak{G}}{3} R^3 \pi. \tag{17}$$

Eine ebenso grosse Kraft muss auf die Kugel ausgeübt werden, wenn sie unter dem Druck der Flüssigkeit in Ruhe bleiben soll. Da es nur auf die relative Geschwindigkeit zwischen Flüssigkeit und Kugel ankommt, so muss dieselbe Kraft in entgegengesetzter Richtung ausgeübt werden, um die Kugel in der Flüssigkeit zu beschleunigen. Ist die Dichtigkeit der homogenen Kugelmasse s', so ist die im ganzen für die Bewegung der Kugel aufzuwendende beschleunigende Kraft

$$= \frac{4}{3} R^3\pi \left(s' + \frac{s}{2}\right) \mathfrak{G}. \tag{18}$$

Der Einfluss der Flüssigkeit ist derselbe, wie die Vergrösserung der Dichtigkeit die Kugel um die halbe Dichtigkeit der Flüssigkeit. Wenn die Geschwindigkeit der Kugel relativ zur Flüssigkeit constant

ist, so halten sich alle auf die Kugeloberfläche einwirkenden Kräfte im Gleichgewicht.

Um die Bewegung eines beliebig gestalteten Körpers in einer Flüssigkeit zu bestimmen, werden wir später von allgemeinen dynamischen Principien ausgehen. Wenn man im allgemeinen die Bewegung der Flüssigkeit bestimmen will, die durch die Bewegung des festen Körpers hervorgerufen wird, hat man in folgender Weise zu verfahren.

Es seien u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit des festen Körpers, p, q, r die Componenten der Drehungsgeschwindigkeit in Bezug auf ein mit dem Körper fest verbundenes Coordinatensystem.

$$\begin{aligned} &u + zq - yr \\ &v + xr - zp \\ &w + yp - xq \end{aligned} \qquad 19)$$

sind dann die Componenten der Geschwindigkeit eines Punktes, dessen Coordinaten x, y, z sind. Also ist

$$(u + zq - yr) \cos nx + (v + xr - zp) \cos ny + (w + yp - xq) \cos nz.$$

die Componente der Geschwindigkeit eines Punktes der Oberfläche parallel zur Normalen. Diese Componente muss mit der Geschwindigkeit der Flüssigkeit an diesem Punkte übereinstimmen, ist also gleich $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$. Für φ gilt die Gleichung $\Delta \varphi = 0$ und die Bedingung, dass es im Unendlichen verschwindet. Es ist also φ linear zusammengesetzt aus sechs Ausdrücken, welche die u, v, w, p, q, r als Factoren enthalten. Setzen wir $v = w = p = q = r = 0$, so haben wir z. B. beim dreiaxigen Ellipsoid den S. 91 behandelten Fall, wenn wir dort die Flüssigkeit ruhen lassen und das Ellipsoid mit derselben Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung bewegen. Es war nach Gleichung 15)

$$\varphi = \frac{u\, abc\, x}{2 - A} \left\{ \int_\infty^{\varepsilon_1} \frac{d\varepsilon_1}{(a^2 + \varepsilon_1) \sqrt{(a^2 + \varepsilon_1)(b^2 + \varepsilon_1)(c^2 + \varepsilon_1)}} \right\}.$$

Bezeichnen wir nun mit Ω das Integral

$$-\frac{abc}{2} \int_\infty^{\varepsilon_1} d\varepsilon \frac{1 - \frac{x^2}{a^2 + \varepsilon_1} - \frac{y^2}{b^2 + \varepsilon_1} - \frac{z^2}{c^2 + \varepsilon_1}}{\sqrt{(a^2 + \varepsilon_1)(b^2 + \varepsilon_1)(c^2 + \varepsilon_1)}}, \qquad 20)$$

so ist

$$\varphi = \frac{u}{2-A} \frac{\partial \Omega}{\partial x}. \tag{21}$$

Schreiben wir entsprechend

$$B = abc \int_0^\infty \frac{d\varepsilon_1}{(b^2+\varepsilon_1)\sqrt{(a^2+\varepsilon_1)(b^2+\varepsilon_1)(c^2+\varepsilon_1)}}$$

$$C = abc \int_0^\infty \frac{d\varepsilon_1}{(c^2+\varepsilon_1)\sqrt{(a^2+\varepsilon_1)(b^2+\varepsilon_1)(c^2+\varepsilon_1)}}, \tag{22}$$

so ist, wenn $u = w = p = q = r = 0$ sind,

$$\varphi = \frac{v}{2-B} \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \tag{23}$$

daher auch, wenn nur $p = q = r = 0$ sind,

$$\varphi = \frac{u}{2-A} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{v}{2-B} \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \frac{w}{2-C} \frac{\partial \Omega}{\partial z}. \tag{24}$$

Um den Einfluss der Drehungen des Ellipsoids zu erhalten, setzen wir zunächst $u = v = w = q = r = 0$ und

$$\varphi = yz\chi. \tag{25}$$

Dann ist

$$\Delta\varphi = 0 = \Delta\chi + \frac{2}{y} \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{2}{z} \frac{\partial \chi}{\partial z},$$

oder wenn wir wieder annehmen, dass χ nur von ε_1 abhängt

$$\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} \left[\left(\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{V}\mathfrak{W}}\right) \frac{d\chi}{d\varepsilon_1}\right] + \left(\frac{\mathfrak{U}^2}{b^2+\varepsilon_1} + \frac{\mathfrak{U}^2}{c^2+\varepsilon_1}\right) \frac{d\chi}{d\varepsilon_1} = 0.$$

Setzen wir wieder wie in Gleichung 13)

$$\chi_1 \chi_2 = \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{V}\mathfrak{W}} \frac{d\chi}{d\varepsilon_1},$$

so folgt

$$\frac{d\chi_1}{d\varepsilon_1} + \left(\frac{1}{b^2+\varepsilon_1} + \frac{1}{c^2+\varepsilon_1}\right) \chi_1 = 0$$

$$\chi_1 = \frac{1}{(b^2+\varepsilon_1)(c^2+\varepsilon_1)}$$

$$-\frac{1}{4} \frac{(a^2+\varepsilon_1)(b^2+\varepsilon_1)(c^2+\varepsilon_1)(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2}{(a^2+\varepsilon_2)(b^2+\varepsilon_2)(c^2+\varepsilon_2)(a^2+\varepsilon_3)(b^2+\varepsilon_3)(c^2+\varepsilon_3)} \left(\frac{d\chi}{d\varepsilon_1}\right)^2 = \chi_1^2 \chi_2^2$$

und

$$\frac{d\chi}{d\varepsilon_1} = \frac{c_1}{(b^2+\varepsilon_1)(c^2+\varepsilon_1)\sqrt{(a^2+\varepsilon_1)(b^2+\varepsilon_1)(c^2+\varepsilon_1)}}$$

$$\chi = c_1 \int_{\infty}^{\varepsilon_1} \frac{d\varepsilon_1}{(b^2+\varepsilon_1)(c^2+\varepsilon_1)\sqrt{(a^2+\varepsilon_1)(b^2+\varepsilon_1)(c^2+\varepsilon_1)}}. \tag{26}$$

c_1 ist eine Constante.

An der Oberfläche muss

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = p\,(y\cos nz - z\cos ny)$$

sein. Dies ist gleichbedeutend mit

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_1} = p\left(y\frac{\partial z}{\partial\varepsilon_1} - z\frac{\partial y}{\partial\varepsilon_1}\right).$$

An der Oberfläche ist wieder $\varepsilon_1 = 0$. Daher

$$\frac{\partial y}{\partial\varepsilon_1} = \tfrac{1}{2}\frac{y}{b^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial\varepsilon_1} = \tfrac{1}{2}\frac{z}{c^2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_1} = \tfrac{1}{2}\, yz\chi\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) + yz\frac{d\chi}{d\varepsilon_1}.$$

Ferner ist für $\varepsilon_1 = 0$

$$\frac{d\chi}{d\varepsilon_1} = \frac{c_1}{b^2c^2abc}$$

$$\chi = \frac{(B-C)\,c_1}{abc\,(b^2-c^2)}.$$

Wir erhalten demnach

$$\varphi = \frac{yzp\,(b^2-c^2)\,abc}{(b^2+c^2)(B-C)+2(b^2-c^2)} \int_{\infty}^{\varepsilon_1} \frac{d\varepsilon_1}{(b^2+\varepsilon_1)(c^2+\varepsilon_1)\sqrt{(a^2+\varepsilon_1)(b^2+\varepsilon_1)(c^2+\varepsilon_1)}}. \tag{27}$$

Hierdurch wird die Bewegung der Flüssigkeit bestimmt, die durch die Drehung des Ellipsoids um die x-Axe verursacht wird. Ist $b = c$, so ist $\varphi = 0$. Die Drehung eines Rotationsellipsoids um seine Symmetrieaxe hat keinen Einfluss auf die Bewegung der Flüssigkeit. Daher haben Drehungen einer Kugel um eine beliebige Axe keinen Einfluss auf die Bewegung der Flüssigkeit. Für sie ist das allgemeinste Geschwindigkeitspotential

$$\varphi = \frac{R^3}{2}\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right). \tag{28}$$

Die Ring-Coordinaten können wir dazu benutzen, die in sich zurücklaufenden Strömungen zu bestimmen, die sich um einen cylindrischen Stab um seine Axe herum herstellen können, während die Flüssigkeit von aussen durch eine cylindrische Röhre, die aber mit dem Stabe nicht concentrisch ist, eingeschlossen ist.

Um wieder unsere gewöhnlichen Bezeichnungen für cylindrische Anordnung beizubehalten, setzen wir jetzt für $\varrho + xi$ die Variable $x + iy$. Für ε setzen wir $e^{n\psi}$, für λ jetzt $n\varphi$, wo n eine Constante bezeichnet. Da jetzt $x + iy$ eine Function von $\psi + i\varphi$ ist, so ist die Continuitätsgleichung erfüllt.

Die Linien $\psi = \text{const}$, die Stromlinien, sind dann die excentrischen Kreise, die wir betrachtet haben, und ein beliebiger von ihnen kann die Röhrenwand darstellen. Nimmt $n\varphi$ um 2π zu, so gelangen wir wieder an den Ausgangspunkt zurück. Die Linie $\varphi = 0$ ist das Stück der y-Axe, das von der Röhrenwand und der Oberfläche des Stabes begrenzt wird und der x-Axe am nächsten liegt. Dasselbe Stück entspricht auch dem Werthe $n\varphi = 2\pi$. An diesem Querschnitt ändert sich also der Werth von $n\varphi$ sprungweise um 2π.

Der Radius des inneren Stabes kann unendlich klein werden, wenn $\varepsilon = \infty$ oder $\varepsilon = 0$, also $\psi = \pm \infty$ ist.

Mit Hülfe der Ring-Coordinaten können wir auch die Bewegung der Flüssigkeit um sehr dünne Ringe mit kreisförmigem Querschnitt untersuchen.

Wir setzen in Gleichung 68) Abschnitt I

$$\varphi_2 = \sqrt{1 - \varepsilon^2}\, \varepsilon^n \varphi_3 , \tag{29}$$

so erhalten wir die Differentialgleichung

$$\varepsilon (1 - \varepsilon^2) \frac{d^2\varphi_2}{d\varepsilon^2} + [(2n + 1) - (2n + 3)\varepsilon^2] \frac{d\varphi_3}{d\varepsilon} - \varepsilon (2n + 1) \varphi_3 = 0, \tag{30}$$

und wenn $\mu = 1 - \varepsilon^2$ ist,

$$\mu (1 - \mu) \frac{d^2\varphi_3}{d\mu^2} + [1 - (n + 2)\mu] \frac{d\varphi_3}{d\mu} - \tfrac{1}{4} (n + \tfrac{1}{2}) \varphi_3 = 0. \tag{31}$$

Diese Differentialgleichung lässt sich durch die Gauss'sche hypergeometrische Reihe integriren. Es ist nach Gauss'scher Bezeichnung

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \mu) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\mu + \frac{\alpha(\alpha + 1)\beta(\beta + 1)}{1.2.\gamma(\gamma + 1)}\mu^2 + \dots\dots$$

und

$$\varphi_3 = c\sqrt{b}\,F(n+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,\mu),$$

also (c ist eine Constante)

$$\varphi_2 = c\sqrt{b}\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\varepsilon^n F(n+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,1-\varepsilon^2)$$

und nach 64) Abschnitt I

$$\varphi = c\sqrt{1+2\varepsilon\cos\lambda+\varepsilon^2}\,\varepsilon^n F\sin n\lambda. \qquad 32)$$

Wir wollen nun eine möglichst einfache Bewegung untersuchen. Die Strömung sei im Unendlichen parallel der z-Axe und der Querschnitt des Ringes verschwindend klein. An der Ringoberfläche für $\varepsilon=\varepsilon_0$ muss $\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}$ verschwinden. Um diesen Bedingungen zu genügen, nennen wir u_1 die Geschwindigkeit im Unendlichen parallel der z-Axe und setzen

$$\varphi = c\left[\sin n\lambda\sqrt{1+2\varepsilon\cos\lambda+\varepsilon^2}\,\varepsilon^n F + \frac{u_1}{c}z\right]$$

$$= c\sin n\lambda\sqrt{1+2\varepsilon\cos\lambda+\varepsilon^2}\,\varepsilon^n F - \frac{2b\varepsilon u_1\sin\lambda}{(1+2\varepsilon\cos\lambda+\varepsilon^2)}.$$

Im Unendlichen muss $\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}$ gleich $u_1\frac{\partial z}{\partial\varepsilon}$ und $u_1\frac{\partial z}{\partial\lambda}$ werden. Ferner muss die Linie $\varrho=0$ eine Stromlinie sein, weil Symmetrie um diese Linie vorhanden sein soll. Es muss also $\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}$ für $\varrho=0$ verschwinden. Die Linie $\varrho=0$ wird durch die Gleichung $\varepsilon=1$ und $\lambda<\pi$ für positive z, $\lambda>\pi$ für negative z ausgedrückt.

Nun ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon} = c\sin n\lambda\left[\frac{[n\varepsilon^{n-1}+(2n+1)\varepsilon^n\cos\lambda+(n+1)\varepsilon^{n+1}]F+\varepsilon^n(1+2\varepsilon\cos\lambda+\varepsilon^2)\frac{dF}{d\varepsilon}}{\sqrt{1+2\varepsilon\cos\lambda+\varepsilon^2}}\right]$$

$$-\left[\frac{2bu_1(1-\varepsilon^2)}{(1+2\varepsilon\cos\lambda+\varepsilon^2)^2}\right]\sin\lambda$$

und allgemein

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x),$$

also

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = -(n+\tfrac{1}{2})\,\varepsilon F(n+\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2},2,1-\varepsilon^2).$$

Für $\varepsilon=1$ ist $F=1$ und $\frac{dF}{d\varepsilon}=-(n+\frac{1}{2})$ und

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}=0,\quad \text{für } \lambda<\pi \text{ und } \lambda>\pi.$$

Das Unendliche für ϱ und $\varkappa$ wird dargestellt durch $\varepsilon = 1$ und $\lambda = \pi$. Für diese Werthe wird

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} = u_1 \frac{\partial \varkappa}{\partial \varepsilon},$$

wenn n eine ganze Zahl, also $\sin n\pi = 0$ ist, andererseits

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = u_1 \frac{\partial \varkappa}{\partial \lambda},$$

also ist im Unendlichen

$$\varphi = u_1 \varkappa.$$

Die hypergeometrische Reihe convergirt, solange $1 - \varepsilon^2 < 1$ bleibt. Wir setzen jetzt $\varepsilon = \varepsilon_0$ für die Oberfläche des Ringes. Ist a die Entfernung der Mittellinie von der Symmetrieaxe, so ist der Radius des Querschnittes der Ringfläche nach 65) Abschnitt I

$$R = \frac{2a\,\varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0^2}.$$

An der Ringoberfläche muss $\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} = 0$ sein. Wenn der Radius R verschwindend klein ist, so ist

$$R = 2a\,\varepsilon_0.$$

Für verschwindende Werthe von ε divergiren die hypergeometrischen Reihen. Es ist aber

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \mu) = (1 - \mu)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, \mu).$$

Die rechtsstehende convergirt für $\mu = 1$, wenn die linksstehende divergirt, und zwar ist

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \mu) = \frac{\Pi(\gamma - 1)\,\Pi(\alpha + \beta - \gamma - 1)\,(1 - \mu)^{\gamma - \alpha - \beta}}{\Pi(\alpha - 1)\,\Pi(\beta - 1)},$$

wo $\Pi(\nu)$ die Gammafunction

$$\Pi(\nu - 1) = \int_0^\infty x^{\nu - 1} e^{-x}\, dx$$

bezeichnet. In unserm Fall ergiebt sich für verschwindendes ε und $n = 1$

$$F(\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, 1 - \varepsilon^2) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\varepsilon^2}$$

und

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{\varepsilon^3}.$$

Es ist dann also für verschwindendes ε_0

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} = \sin \lambda \left(- \frac{2c}{\pi \varepsilon_0^2} - 2 b u_1 \right) \tag{33}$$

und da $\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} = 0$ sein soll

$$- c = b u_1 \varepsilon_0^2 \pi$$

$$= u_1 \frac{R^2 \pi}{4a}. \tag{34}$$

Ferner ist $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = - 2 u_1 R \cos \lambda$, also die tangentiale Geschwindigkeit $- 2 u_1 \cos \lambda$.

Discontinuirliche Bewegungen.

Während bei den meisten Betrachtungen über die Bewegungen der Flüssigkeiten die Voraussetzung zu Grunde gelegt wird, dass die Geschwindigkeiten in der ganzen Flüssigkeit stetig sind, betrachten wir nun solche Bewegungen, bei denen an bestimmten Flächen die Geschwindigkeiten unstetige Werthe annehmen. Solche Flächen verhalten sich ganz wie freie Oberflächen; sie müssen aus Stromlinien gebildet werden und der Druck muss an ihnen beiderseits constant sein.

Bisher ist es nur gelungen, solche Bewegungen unter der Voraussetzung zu behandeln, dass nur Geschwindigkeiten parallel einer Ebene vorhanden sind. Nehmen wir diese als die xy-Ebene und nennen φ das Geschwindigkeitspotential, so ist nach S. 88

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \tag{35}$$

also

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad p = \text{const} - s \tfrac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right]. \tag{36}$$
$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Die Differentialgleichungen werden integrirt, wenn wir

$$x + iy = F(\varphi + i\psi)$$

setzen.

Die Stromlinien haben die Gleichung $\psi = \text{const}$.

Die Geschwindigkeit kann an einer Linie der xy-Ebene unstetig sein, wenn für sie

$$\psi = \text{const} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = \text{const ist.}$$

Die letzte Gleichung ist durch die Constanz des Drucks bedingt.

Ferner ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2},$$

also

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2}.$$

Wir können also in der Unstetigkeitslinie auch

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = \text{const} \tag{36a}$$

setzen. In den folgenden Betrachtungen lassen wir der Einfachheit halber einen constanten Factor, der die Dimension einer Geschwindigkeit hat, fort.

Wir setzen

$$\begin{aligned} \frac{d\,(x+iy)}{d\,(\varphi+i\psi)} &= F\,(\varphi+i\psi) + \sqrt{F^2\,(\varphi+i\psi) - 1} \qquad 37) \\ &= F\,(\varphi+i\psi) + i\sqrt{1 - F^2\,(\varphi+i\psi)} \\ &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} + i\,\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -i\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} + i\,\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right) = \frac{\partial y}{\partial \psi} - i\,\frac{\partial x}{\partial \psi}. \end{aligned}$$

Ist nun für einen constanten Werth von ψ die Function $F\,(\varphi + i\psi)$ reell und < 1, so ist hier

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = F\,(\varphi+i\psi), \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \sqrt{1 - F^2\,(\varphi+i\psi)}, \tag{38}$$

also

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = 1,$$

es sind dann also die gestellten Bedingungen erfüllt.

Das Gebiet von $\varphi + i\psi$ soll eine einwerthige Function des Gebiets $x + iy$ sein. Verzweigungen müssen daher durch Querschnitte in einfach zusammenhängende Gebiete verwandelt werden. Für diese Querschnitte muss ψ constant sein; denn alle Grenzen müssen durch Stromlinien gebildet werden. Innerhalb des Gebietes soll $x + iy$ und $\varphi + i\psi$ überall unendlich und stetig sein,

Das. Gebiet von $\varphi + i\psi$ ist begrenzt von geraden Linien $\psi = \text{const}$, welche den Grenzen der Flüssigkeit entsprechen und von den Linien $\varphi = \pm \infty$, welche den im Unendlichen liegenden Theilen der strömenden Flüssigkeit entsprechen. Die Grenzlinie des Gebietes von $x + iy$ darf sich nicht selbst schneiden. Die Theile der Grenzlinie, an denen

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = 1$$

ist, können freie Grenzen sein, die übrigen müssen von festen Wänden gebildet werden. Endlich muss der Druck einwerthig sein, also darf $\frac{d(x+iy)}{d(\varphi+i\psi)}$ nicht mehrwerthig sein.

Es sei

$$F(\varphi + i\psi) = k + e^{-(\varphi + i\psi)}, \quad k < 1. \tag{39}$$

Die Linien $\psi = 0$ und $\psi = \pi$ begrenzen das Gebiet. Für $\psi = 0$ wird $F(\varphi) = k + e^{-\varphi}$, für $\varphi = -\log(1-k)$ also $F(\varphi) = 1$. Dies ist ein Verzweigungspunkt für $\frac{d(x+iy)}{d(\varphi+i\psi)}$. Dasselbe gilt für $\varphi = -\log(1+k)$, $\psi = \pi$. Beide Punkte liegen nicht mehr im Gebiet $\varphi + i\psi$. In diesen Verzweigungspunkten schliessen sich die freien an die festen Grenzen.

Für $\psi = \pi \quad \varphi < -\log(1+k)$ ist

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = k - e^{-\varphi} - \sqrt{(k - e^{-\varphi})^2 - 1}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = 0, \quad y = \text{const} = 0.$$

$$x = k\varphi + e^{-\varphi} - k\log\left(-k + e^{-\varphi} + \sqrt{(k - e^{-\varphi})^2 - 1}\right)$$
$$+ \sqrt{1 - k^2}\arcsin\left[k + (1 - k^2)e^{\varphi}\right] + \sqrt{(k - e^{-\varphi})^2 - 1}. \tag{40}$$

Für $\varphi = -\log(1+k)$, $e^{-\varphi} = 1 + k$ wird

$$x = -k\log(1+k) + 1 + k + \frac{\pi}{2}.$$

An dieser Stelle beginnt die freie Grenze, da jetzt nur $k\varphi + e^{-\varphi}$ noch reell bleiben. Von hier an wird der absolute Werth von $k - e^{-\varphi}$ kleiner als Eins. Das Vorzeichen der Quadratwurzel im Ausdruck für $\frac{\partial x}{\partial \varphi}$ bestimmt sich daher, daß für $\varphi = -\infty$, $x = +\infty$ wird.

Für die freie Grenze haben wir

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = k - e^{-\varphi} \qquad\qquad x = k\varphi + e^{-\varphi}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\sqrt{1-(k-e^{-\varphi})^2}.$$

Es ist

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = k - e^{-\varphi} = 0$$

für $\varphi = -\log k$. An dieser Stelle wo $x = -k \log k + k$ ist, kehrt die Linie um und geht wieder zurück, indem für $\varphi = \infty$ wieder $x = \infty$ wird.

Die weitere Begrenzung ist die Linie $\varphi = -\infty$. Wir haben hier für $\varphi = -\infty$ nach 37)

$$\frac{\partial x}{\partial \psi} + i\frac{\partial y}{\partial \psi} = i\,[2k + 2e^{-\varphi}(\cos\psi - i\sin\psi)],$$

also ist

$$\frac{\partial x}{\partial \psi} = 2e^{-\varphi}\sin\psi, \quad x = -2e^{-\varphi}\cos\psi + C_1,$$

die Grösse C_1 ergiebt sich daraus, dass diese Linie sich an die vorige für $\psi = \pi$ anschliessen muss. Ebenso

$$\frac{\partial y}{\partial \psi} = 2k + 2e^{-\varphi}\cos\psi, \quad y = 2k\psi + 2e^{-\varphi}\sin\psi + C_2.$$

Hieran schliesst sich die Linie $\psi = 0$. Für $\varphi > -\log(1-k)$ ist

$$x = k\varphi - e^{-\varphi} + C_3$$

$$y = -\sqrt{1-(k+e^{-\varphi})^2} + C_4,$$

die Constanten C_3, C_4 sind durch den Anschluss an die vorige Linie zu bestimmen. Soweit ist die Linie eine freie Grenze; für $\varphi < -\log(1-k)$ ist

$$x = \int [k + e^{-\varphi} + \sqrt{(k+e^{-\varphi})^2 - 1}]\, d\varphi + C_3$$

$$y = C_4.$$

Die Gleichung

$$0 = \frac{\partial x}{\partial \varphi} = k + e^{-\varphi}$$

hat keine reellen Wurzeln. Es schreitet daher x von $-\infty$ für $\varphi = -\infty$ bis $x = \infty$ für $\varphi = \infty$ ohne Umkehr fort.

Endlich ist für $\varphi = +\infty$

$$\frac{\partial x}{\partial \psi} + i\frac{\partial y}{\partial \psi} = i\,(k - i\sqrt{1-k^2})$$

und da $x + iy$ gleich einer Function von $(\varphi + i\psi)$ sein muss, so ist

$$x = \sqrt{1-k^2}\,\psi + k\varphi + C_5$$
$$y = -\sqrt{1-k^2}\,\varphi + k\psi + C_6,$$

wo C_5 und C_6 unabhängig von φ und ψ sind.

Aus dieser Gleichung folgt bei constantem ψ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}.$$

Die freie Grenze bildet im Unendlichen mit der Horizontalen einen Winkel, des Cosinus k ist. (Fig. 5).

Setzen wir $k = 1$, so kommen wir auf einen Strahl der parallel der x-Axe läuft.

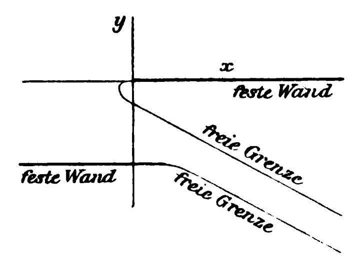


Fig. 5.

Ist $k = 0$, so ist

$$x + iy = -e^{-(\varphi+\psi i)} \pm \sqrt{e^{-2(\varphi+i\psi)} - 1}$$
$$+ \operatorname{arctg}\sqrt{e^{-2(\varphi+\psi i)} - 1} + \text{const.} \qquad 41)$$

Die Vorzeichen und der Quadrant des arctg bestimmen sich am einfachsten in folgender Weise:

Aus der Gleichung

$$\alpha + \beta i = \operatorname{arctg}(a + bi)$$

folgt

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha(1+\operatorname{tg}^2 i\beta) + \operatorname{tg} i\beta(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2 i\beta} = a + bi.$$

Nun ist $\operatorname{tg}\alpha$ reell, $\operatorname{tg} i\beta$ rein imaginär, also ist

$$a = \frac{\operatorname{tg}\alpha(1+\operatorname{tg}^2 i\beta)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2 i\beta}, \qquad bi = \frac{\operatorname{tg} i\beta(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2 i\beta},$$

sind nun a und b von derselben Ordnung unendlich, so muss, da $\operatorname{tg} i\beta$ nicht unendlich werden kann, $\operatorname{tg}\alpha$ unendlich werden und $\frac{\operatorname{tg} i\beta}{i}$ von der Ordnung $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ unendlich klein werden. Es ist also bis auf verschwindende Grössen $\operatorname{arctg}(a+bi) = \frac{\pi}{2}$.

Also ist für $\varphi = -\infty$

$$x + iy = -e^{-(\varphi+\psi i)} \pm e^{-(\varphi+\psi i)} + \frac{\pi}{2} + \text{const.}$$

Wir wählen nun die Constante so, dass für $\psi = \pi$ und $\varphi = -\infty$

$$x = 2e^{-\varphi} \text{ wird.}$$

Dann muss für $\psi = \pi$ und $\varphi < 0$ sein

$$x = e^{-\varphi} + \sqrt{e^{-2\varphi} - 1} + \pi - \operatorname{arctg} \sqrt{e^{-2\varphi} - 1} - \frac{\pi}{2}$$

für $\psi = 0$ und $\varphi < 0$

$$x = -e^{-\varphi} - \sqrt{e^{-2\varphi} - 1} + \operatorname{arctg} \sqrt{e^{-2\varphi} - 1} - \frac{\pi}{2},$$

weil für $\varphi = -\infty$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \mp 2e^{-\varphi}$$

sein muss für $\psi = \pi$ und $\psi = 0$.

Dann ist für

$$\psi = \pi \text{ und } \varphi < 0$$

$$x = e^{-\varphi} + \sqrt{e^{-2\varphi} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{e^{-2\varphi} - 1} + \frac{\pi}{2}$$

$$y = 0.$$

Für $\psi = \pi$, $\varphi = 0$ ist

$$x = 1 + \frac{\pi}{2}, \quad y = 0.$$

Diese feste Wand geht von $x = \infty$ bis

$$x = 1 + \frac{\pi}{2}.$$

Für $\psi = \pi$ und φ positiv ist

$$x = e^{-\varphi} + \frac{\pi}{2}$$

$$y = \sqrt{1 - e^{-2\varphi}} - \tfrac{1}{2} \log \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}}.$$

Für $\psi = \pi$, $\varphi = +\infty$ ist

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad y = 1 - \log 2 - \varphi.$$

Hält man nun $\varphi = \infty$ constant und lässt ψ von π bis 0 gehen, so ist

$$x + iy = i - \frac{i}{2} \log \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2(\varphi + \psi i)}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2(\varphi + \psi i)}}} - \frac{\pi}{2}$$

$$= i = i \log 2 - i(\varphi + i\psi) - \frac{\pi}{2}.$$

Daher

$$x = \psi - \frac{\pi}{2}, \quad y = 1 - \log 2 - \varphi.$$

Die Flüssigkeit strömt also für $y = -\infty$ in einem Strom von der Breite π.

Für $\psi = 0$, $\varphi = \infty$ ist

$$x = -\frac{\pi}{2}, \quad y = 1 - \log 2 - \varphi.$$

Geht nun für $\psi = 0$ der Werth von φ von ∞ bis 0, so haben wir

$$x = -e^{-\varphi} - \frac{\pi}{2}$$

$$y = \sqrt{1 - e^{-2\varphi}} - \tfrac{1}{2} \log \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}}.$$

Für $\varphi = \psi = 0$, wird

$$x = -1 - \frac{\pi}{2}, \quad y = 0.$$

Ist $\psi = 0$ und geht φ von 0 bis $-\infty$, so ist

$$x = -e^{-\varphi} - \sqrt{e^{-2\varphi} - 1} + \operatorname{arctg} \sqrt{e^{-2\varphi} - 1} - \frac{\pi}{2}$$

$$y = 0.$$

Für $\psi = 0$, $\varphi = -\infty$ ist

$$x = -2e^{-\varphi}$$

$$y = 0.$$

Ist $\varphi = -\infty$ und geht ψ von 0 bis π, so ist

$$x = -2e^{-\varphi} \cos \psi$$

$$y = 2e^{-\varphi} \sin \psi.$$

Hieraus folgt

$$x^2 + y^2 = 4e^{-2\varphi}.$$

Diese Begrenzung ist also ein um den Punkt $x = 0$ mit dem Radius $2e^{-\varphi}$ geschlagener Halbkreis. Die Geschwindigkeit ist

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2}} = \frac{1}{2e^{-\varphi}}.$$

Für $\psi = \pi$, $\varphi = -\infty$, ist

$$x = 2e^{-\varphi}$$

$$y = 0.$$

Dadurch ist Anschluss an den Ausgangspunkt erreicht. Die Verzweigungspunkte, wo sich die freien an die festen Grenzen anschliessen, sind $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ und $\psi = \pi$, also

$$x = -1 - \frac{\pi}{2},\ y = 0$$

$$\text{und } x = \ \ 1 + \frac{\pi}{2},\ y = 0.$$

Der Strahl tritt also zwischen den Punkten

$$x = -1 - \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad x = 1 + \frac{\pi}{2} \ \text{aus,}$$

während die übrigen Theile der x-Axe feste Wand sind.

Die freien Grenzen sind die Linien

$$\psi = \pi,\ \varphi \text{ von } 0 \text{ bis } \infty$$

$$x = e^{-\varphi} + \frac{\pi}{2}$$

$$y = \sqrt{1 - e^{-2\varphi}} - \tfrac{1}{2} \log \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}} \tag{42}$$

$$\psi = 0,\ \varphi \text{ von } 0 \text{ bis } \infty$$

$$x = -e^{-\varphi} - \frac{\pi}{2}$$

$$y = \sqrt{1 - e^{-2\varphi}} - \tfrac{1}{2} \log \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}}.$$

Fig. 6.

Sie liegen also symmetrisch zur y-Axe. Für φ und $y = \infty$ hat der Strahl die Breite π. Er zieht sich also von der Breite $2 + \pi$ auf die Breite π zusammen. (Fig. 6).

Für ein weiteres Beispiel setzen wir

$$F(\varphi + i\psi) = \frac{1}{\sqrt{\varphi + i\psi}}. \tag{43}$$

Dies Gebiet soll durch die Linie der positiven φ und $\psi = 0$ begrenzt sein. Die Verzweigungspunkte sind $\psi = 0$, $\sqrt{\varphi} = \pm 1$; sie liegen also auf der Begrenzungslinie. Durch Integration folgt

$$x + iy = 2\sqrt{\varphi + i\psi} + (\varphi + i\psi)\sqrt{\frac{1}{\varphi + i\psi} - 1} + \arcsin\sqrt{\varphi + i\psi}.$$

Die feste Wand liegt zwischen

$$\sqrt{\varphi} = -1 \quad \text{und} \quad \sqrt{\varphi} = +1 \ \text{für} \ \psi = 0.$$

Sie liegt auf der geraden Strecke

$$y = 0, \quad x = 2 + \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad x = -2 - \frac{\pi}{2},$$

hat also die Länge $4 + \pi$.

Für $\varphi > 1$ beginnt die freie Grenze. Für sie ist

$$x = \pm 2\sqrt{\varphi} \pm \arcsin\sqrt{\varphi}$$
$$y = \varphi\sqrt{1 - \frac{1}{\varphi}}.$$

Die freien Grenzen liegen symmetrisch zur y-Axe.

Da an den festen Grenzen $F(\varphi + i\psi)$ reell ist, so ist

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{1}{v},$$

wenn v die Geschwindigkeit bezeichnet. Der Druck ist

$$p = C - \frac{s}{2}v^2.$$

An der freien Grenze ist $v = 1$ und der Druck constant C_0. C_0 ist der Druck in der ruhenden Flüssigkeit. Also ist

$$C - \frac{s}{2} = C_0$$
$$p = C_0 + \frac{s}{2}(1 - v^2).$$

Auf jedes Element dx der festen Wand übt also die bewegte Flüssigkeit gegenüber der ruhenden einen Ueberdruck aus von der Grösse

$$\frac{s}{2}(1 - v^2)\,dx.$$

Da nun an der Wand ψ constant ist, so ist

$$dx = \frac{1}{v}\,d\varphi.$$

Der Ueberdruck ist also $\frac{s}{2}\left(\frac{1}{v} - v\right)d\varphi$, der gesammte also nach 37)

$$2s\int_0^{+1}\sqrt{\frac{1}{\varphi} - 1}\,d\varphi = s\pi.$$

Dieser Druck ist dem Quadrate der Geschwindigkeit u an der freien Grenze proportional.

Ist also die Länge der festen Grenze L, so ist der Druck, den sie durch den Strahl erfährt, wenn s die Dichtigkeit der Flüssigkeit ist

$$\frac{su^2L\pi}{4 + \pi}. \tag{44}$$

Durch diesen Ausdruck wird die Kraft gemessen, welche auf die feste Wand ausgeübt werden muss, um sie an ihrer Stelle zu halten. Denkt man sich andererseits am ganzen System die Geschwindigkeit u in entgegengesetzter Richtung ertheilt, so bewegt sich eine feste Platte in einer unbegrenzten Flüssigkeit, an den Discontinuitätsflächen beiderseits ruhende Flüssigkeit zurücklassend. Für unendlich grosse Werthe von φ und ψ wird x und y unendlich und

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} + i\frac{\partial y}{\partial \varphi} = i, \quad \text{also} \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{\frac{\partial y}{\partial \varphi}} = 1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Die Geschwindigkeit ist im Unendlichen für x und im positiv Unendlichen für y von derselben Grösse wie an der freien Grenze. Im Falle der bewegten Platte ruht also dort die Flüssigkeit. Die Arbeit, welche bei der Bewegung der Platte geleistet wird, ist in der Zeiteinheit

$$\frac{su^3 L\pi}{4+\pi}$$

und wird dazu verbraucht, den hinter der Platte sich vergrössernden Raum mit bewegter Flüssigkeit zu füllen.

Die Versuche, die Gestalt eines aus einer kreisförmigen Oeffnung austretenden Strahles mathematisch zu bestimmen, sind bisher nicht gelungen. Dagegen kann man für die Verengerung des Querschnittes, die nach den Entwicklungen S. 108 im Verhältniss $\frac{\pi}{2+\pi}$ für spaltförmige Oeffnungen eintritt, obere und untere Grenzen aufstellen, wenn man die Dimensionen der Oeffnung als verschwindend klein gegen die des Gefässes betrachtet. Sei φ das Geschwindigkeitspotential, c die vertikale Ausflussgeschwindigkeit in der Oeffnung, so erhält man einen angenäherten Ausdruck

$$\varphi_1 = \frac{1}{2\pi}\int \frac{c\,dS}{r}; \tag{45}$$

dS ist ein Element der Oeffnung, r die Entfernung dieses Elementes von dem betrachteten Punkte.

Für Punkte, die in der Oeffnung liegen, ist der Differentialquotient nach der Normale

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -c.$$

Für Punkte des horizontalen Bodens ist

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = 0 .$$

Da die Dimensionen der Ausflussöffnung unendlich klein sind, so ist die Differenz $\varphi - \varphi_1$ in endlicher Entfernung von der Oeffnung unendlich klein, in der Oeffnung ist $\varphi - \varphi_1$ Null, es ist daher die Differenz $\varphi - \varphi_1$, ebenso wie ihre Ableitungen nach den Coordinaten überall verschwindend.

Nehmen wir die z-Coordinate in der Richtung der Axe des Strahles an und setzen überall Symmetrie um diese Axe voraus, so haben bei Einführung von Cylindercoordinaten

$$\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}\frac{c\varrho' d\varrho' d\vartheta}{\sqrt{z^2+\varrho^2+\varrho'^2-2\varrho\varrho'\cos\vartheta}} .$$

Der Radius der Oeffnung ist R. In der Oeffnung sei $z = 0$. Daher ist hier, wenn wir für ϑ setzen $\pi - 2\vartheta'$

$$\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}\frac{c\varrho' d\varrho' d\vartheta}{\sqrt{z^2+\varrho^2+\varrho'-2\varrho\varrho'\cos\vartheta}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{c\varrho' d\varrho' d\vartheta'}{\sqrt{(\varrho+\varrho')^2-4\varrho\varrho'\sin^2\vartheta'}} .$$

Mit Hülfe der Landen'schen Substitution der elliptischen Integrale ergiebt sich die Beziehung

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-p^2\sin^2\alpha}} = \frac{2}{1+p}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dw}{\sqrt{1-\frac{4p}{(1+p)^2}\sin^2 w}}$$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-p^2\sin^2\alpha}} .$$

Hieraus finden wir

$$\varphi = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{c\varrho' d\varrho' d\vartheta'}{\sqrt{\varrho^2-\varrho'^2\sin^2\vartheta'}}$$

und die Geschwindigkeit senkrecht zur Axe

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = -\frac{2\varrho}{\pi}\int_0^R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{c\varrho' d\varrho' d\vartheta'}{(\sqrt{\varrho^2 - \varrho'^2 \sin^2 \vartheta})^3}.$$

Nun ist c in der ganzen Oeffnung positiv, weil die Geschwindigkeit überall denselben Werth hat.

Es ist also der absolute Werth der Geschwindigkeit $\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}$ grösser als

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\varrho^2}\int_0^R\int_0^{2\pi} c\varrho' d\varrho' d\vartheta'.$$

Das Doppelintegral ist die mittlere Ausflussgeschwindigkeit in der Oeffnung multiplicirt mit der Grösse der Oeffnung $R^2\pi$; also gleich

$$\sqrt{2gh}\, R^2 \pi \alpha,$$

wo α das Verhältniss des verengerten Querschnittes zur Oeffnung bezeichnet. Die Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ im verengerten Querschnitt, wenn h die Höhe der Wassersäule bezeichnet, folgt bei kleinen Geschwindigkeiten im Gefäss, aus der Erhaltung der Energie.

Das über den Boden des Gefässes erstreckte Integral

$$\tfrac{1}{2}\int dS \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\right)^2 = \pi \int_R^\infty \varrho\, d\varrho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\right)^2 \qquad 46)$$

ist also grösser als

$$\frac{\alpha^2}{4}\, g h R^2 \pi.$$

Nehmen wir den Strahl als sehr dünn an, so können wir von der Wirkung der Schwere auf ihn absehen. In endlicher Entfernung von der Oeffnung nach dem Innern des Gefässes hin können wir die Beschleunigung vernachlässigen.

In einem Querschnitt des verengerten Strahles ist die Beschleunigung in der Zeiteinheit gleich der hindurchströmenden Wassermasse multiplicirt mit der erreichten Geschwindigkeit, also

$$sS' \sqrt{2gh} \,.\, \sqrt{2gh} = sS'\, 2gh,$$

wenn S' die Grösse des Querschnittes und h die Höhe der über ihr stehenden Wassersäule bezeichnen.

Diese Beschleunigung wird hervorgerufen durch die auf die Wassermasse wirkenden beschleunigenden Kräfte, nämlich den auf die Oeffnung wirkenden hydrostatischen Druck $sSgh$, wo S die Grösse der Oeffnung bezeichnet. Wir nehmen an, dass der Abstand des betrachteten Querschnittes klein ist gegen die Höhe der Wassersäule. Die zweite Kraft ist der Druck, den die Gefässwand auf die Wassermasse ausübt. Wir haben also

$$2gh\,S' = gh\,S + \tfrac{1}{2}\int dS\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\right)^2, \qquad 47)$$

wo die Integration über den festen Boden des Gefässes zu erstrecken ist.

Die erste Näherung für die Zusammenziehung des Strahles ergiebt

$$\alpha = \frac{S'}{S} > \tfrac{1}{2}.$$

Nun haben wir aber gefunden Gleichung 46)

$$\tfrac{1}{2}\int dS\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\right)^2 > \frac{\alpha^2}{4}\,gh R^2\pi,$$

da nun $r^2\pi = S$ ist, so haben wir

$$\alpha > \tfrac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{8}, \qquad 48)$$

oder da $\alpha < 1$ sein muss

$$\alpha > 4 - \sqrt{12}$$
$$\alpha > 0{,}536. \qquad 49)$$

Um eine obere Grenze für α zu gewinnen, entwickeln wir $\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}$ nach Potenzen von $\frac{1}{\varrho^2}$ und erhalten

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\mathfrak{A}_{\mathfrak{a}}}{\varrho^{2\mathfrak{a}+2}}\int_0^R c\varrho'^{2\mathfrak{a}+1}d\varrho = \sum_{\mathfrak{a}} \mathfrak{A}_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{a}} \frac{R^{2\mathfrak{a}+2}}{\varrho^{2\mathfrak{a}+2}}, \qquad 50)$$

wo

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{a}} = (2\mathfrak{a}+1)\left[\frac{1.3\ldots(2\mathfrak{a}-1)}{2.4\ldots2\mathfrak{a}}\right]^2,\quad \mathfrak{a}\geq 1,\quad a_{\mathfrak{a}} = \frac{1}{R^{2\mathfrak{a}+2}}\int_0^R c\varrho'^{2\mathfrak{a}+1}d\varrho,$$

$\mathfrak{A}_0 = 1$ ist.

Betrachten wir nun die Reihe bis zu einem bestimmten Werthe von $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$, so haben wir

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} = \sum_{\mathfrak{a}=0}^{\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_1} \mathfrak{A}_\mathfrak{a} a_\mathfrak{a} \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2\mathfrak{a}+2} + \sum_{\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_1+1}^{\mathfrak{a}=\infty} \mathfrak{A}_\mathfrak{a} a_\mathfrak{a} \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2\mathfrak{a}+2}.$$

Da nun $\varrho > R$ ist, so ist der absolute Werth von $\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}$ kleiner als

$$\sum_{\mathfrak{a}=0}^{\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_1} \mathfrak{A}_\mathfrak{a} a_\mathfrak{a} \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2\mathfrak{a}+2} + \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2\mathfrak{a}_1+4} \sum_{\mathfrak{a}_1+1}^{\infty} \mathfrak{A}_\mathfrak{a} a_\mathfrak{a}. \tag{51}$$

Am Rande der Oeffnung ist die Geschwindigkeit genau so gross, wie am Rande des Strahls, weil der Druck constant sein muss, also

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}_{\varrho=R} = \sqrt{2gh}.$$

Es ist also

$$\sum_{0}^{\infty} \mathfrak{A}_\mathfrak{a} a_\mathfrak{a} = \sqrt{2gh}.$$

Hiernach lässt sich der oben aufgestellte Ausdruck schreiben

$$\sqrt{2gh}\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2\mathfrak{a}_1+4} + \sum_{\mathfrak{a}=0}^{\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_1} \left[\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2\mathfrak{a}+2} - \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2\mathfrak{a}_1+4}\right] \mathfrak{A}_\mathfrak{a} a_\mathfrak{a}.$$

Nun ist die durch die Oeffnung strömende Flüssigkeit

$$= 2\pi \int_0^R c\varrho' \, d\varrho' \quad = 2\pi R^2 a_0 \quad = 2 S a_0.$$

Dieselbe Menge strömt durch den Querschnitt des verengerten Strahls

$$= S' \sqrt{2gh},$$

also ist

$$\frac{S'}{S} = \alpha = \frac{2a_0}{\sqrt{2gh}}.$$

Nun ist

$$a_\mathfrak{a} < a_0 \quad \text{oder} \quad a_\mathfrak{a} < \sqrt{2gh}\,\frac{\alpha}{2},$$

also

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} < \sqrt{2gh}\left\{\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2\mathfrak{a}_1+4} + \frac{\alpha}{2}\sum_{0}^{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{A}_\mathfrak{a}\left[\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2\mathfrak{a}+2} - \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2\mathfrak{a}_1+4}\right]\right\}$$

und

$$\alpha < \tfrac{1}{2} + \pi \int_R^\infty \varrho \, d\varrho \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\right)^2. \tag{52}$$

Für $a = 2$ ergiebt sich

$$\alpha < 0{,}71. \qquad 53)$$

Weitere Glieder der Reihe geben keine grössere Annäherung.

Nach den Erörterungen S. 86 können in einer Flüssigkeit, die allseitig von festen Wänden in einen einfach zusammenhängenden Raum eingeschlossen ist und keine Drehungen der Theile enthält, überhaupt keine Bewegungen eintreten, wenn die Geschwindigkeiten überall stetig sind. Dagegen können sich innerhalb der Flüssigkeit geschlossene Flächen ausbilden, an denen die Geschwindigkeiten Sprünge erleiden und die mit den andern Grenzflächen zusammen einen mehrfach zusammenhängenden Raum einschliessen. In diesen mehrfach zusammenhängenden Räumen können dann in sich zurücklaufende Strömungen stattfinden.

Derartige Bewegungen kommen in der Atmosphäre vor und sind nicht immer wie bei den Cyklonen auf Drehungsbewegungen zurückzuführen. In sich zurücklaufende Windströmungen, die ein ruhendes Luftgebiet umkreisen, können nur durch die Bildung von Unstetigkeitsflächen erklärt werden.

Ein Beispiel solcher Bewegungen wollen wir im Folgenden betrachten.

Wir betrachten $x + iy$ als Function von $\varphi + \psi i$ und setzen

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} + i \frac{\partial y}{\partial \varphi} = a \sin am\,(\varphi + i\psi), \qquad 54)$$

wo a Constanten bezeichnen.

Aus dem Additionstheorem der elliptischen Functionen folgt

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} + i \frac{\partial y}{\partial \varphi} = a\,\frac{\sin am\,\varphi \cos am\,i\psi\,\Delta\,am\,i\psi + \sin am\,i\psi \cos am\,\varphi\,\Delta\,am\,\varphi}{1 - k^2 \sin^2 am\,\varphi \sin^2 am\,i\psi};$$

hier bedeutet k den Modul der elliptischen Functionen.

Hieraus folgt

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = a^2\,\frac{\sin^2 am\,\varphi \cos^2 am\,i\psi\,\Delta^2\,am\,i\psi - \sin^2 am\,i\psi \cos^2 am\,\varphi\,\Delta^2 am\,\varphi}{(1 - k^2 \sin^2 am\,\varphi \sin^2 am\,i\psi)^2}.$$

Setzen wir hierin

$$\psi = \frac{K'}{2}, \text{ wo}$$

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - (1 - k^2)\sin^2 \alpha}} \text{ ist,}$$

so ist

$$\sin am\, i\frac{K'}{2} = \frac{i}{\sqrt{k}}, \; \cos am\, i\frac{K'}{2} = \sqrt{\frac{1+k}{k}},$$

$$\varDelta\, am\, i\frac{K'}{2} = \sqrt{1+k},$$

$$\cos^2 am\, \varphi = 1 - \sin^2 am\, \varphi, \quad \varDelta^2 am\, \varphi = 1 - k^2 \sin^2 am\, \varphi,$$

also für diesen Specialwerth von ψ, wenn wir $\sin am\, \varphi = x$ setzen,

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = a^2 \frac{x^2(1+k)^2 + (1-x^2)(1-k^2x^2)}{k(1+kx^2)^2}$$

$$= \frac{a^2}{k}. \qquad 55)$$

Nach Gleichung 36a) ist also für den Werth

$$\psi = \frac{K'}{2}$$

der Druck constant. Diese Stromlinie kann eine freie Oberfläche darstellen.

Wir haben demnach, wenn wir $\varphi + i\psi = \chi$ setzen

$$x + iy = a\int \sin am\, \chi\, d\chi$$

$$= \frac{a}{k} \log\left[\varDelta\, am\, (\varphi + i\psi) - k \cos am\, (\varphi + i\psi)\right].$$

Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit der Integration, wenn man das Integral differenzirt und die Formeln

$$\frac{d \sin am\, m\chi}{d\chi} = \cos am\, \chi\, \varDelta\, am\, \chi,$$

$$\frac{d\, \varDelta\, am\, m\chi}{d\chi} = -\sin am\, \chi\, \varDelta\, am\, \chi,$$

$$\frac{d\, \varDelta\, am\, m\chi}{d\chi} = -k^2 \sin am\, \chi \cos am\, \chi$$

berücksichtigt.

Um die Bewegung der Flüssigkeit, die durch diese Beziehung dargestellt wird, besser zu übersehen, setzen wir

$$\sigma + \tau i = \varDelta\, am\, (\varphi + \psi i) - k \cos am\, (\varphi + \psi i) \qquad 56)$$

oder bei Anwendung des Additionstheorems

$$\sigma = \frac{\varDelta\, am\, \varphi\, \varDelta\, am\, \psi i - k \cos am\, \varphi \cos am\, \psi i}{1 - k^2 \sin^2 am\, \varphi \sin^2 am\, \psi i},$$

$$i\tau = \frac{k \sin am\, \varphi \sin am\, \psi i \left\{ \Delta\, am\, \varphi\, \Delta\, am\, \psi i - k \cos am\, \varphi \cos am\, \psi i \right\}}{1 - k^2 \sin^2 am\, m\, \varphi \sin^2 am\, m\, \psi i}.$$

Hieraus folgt

$$\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} = \frac{\Delta\, am\, \varphi\, \Delta\, am\, \psi i - k \cos am\, \varphi \cos am\, \psi i}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 am\, \varphi \sin^2 am\, \psi i}},$$

$$\frac{\tau}{\sigma} = \frac{k \sin am\, \varphi \sin am\, \psi i}{i}.$$

Betrachten wir σ und τ als rechtwinklige Coordinaten, so ist zunächst für $\varphi = 0$ und $\varphi = 2K$, wo K das elliptische Integral erster Gattung zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ in Bezug auf den Modul k bedeutet, $\sin am\, \varphi = 0$, also $\tau = 0$. Hierdurch wird also die positive σ-Axe dargestellt. σ kann niemals negativ werden, solange k positiv und reell und < 1 bleibt. Da nämlich $\sin am\, \psi i$ eine rein imaginäre Grösse ist, können wir für sie $i\varepsilon$ setzen und erhalten

$$\sigma = \frac{\sqrt{1 - k^2 \varkappa^2}\sqrt{1 + \varepsilon^2 k^2} - k\sqrt{1 - \varkappa^2}\sqrt{1 + \varepsilon^2}}{1 + k^2 \varkappa^2 \varepsilon^2}.$$

Der Nenner von σ ist stets positiv. Ferner ist $\Delta\, am\, \varphi$ und $\Delta\, am\, \psi i$ stets positiv, ausserdem, da k positiv, reell und < 1 ist, so ist

$$\sqrt{1 - k^2 \varkappa^2} > \sqrt{1 - \varkappa^2} \text{ und } \sqrt{1 + \varepsilon^2 k^2} > \sqrt{k^2 + \varepsilon^2 k^2},$$

sodass also das erste Glied des Zählers immer grösser als das zweite ist. Für $\tau = 0$ ist, je nachdem $\varphi = 0$ oder $\varphi = 2K$ ist,

$$\sigma = \Delta\, am\, \psi i \mp k \cos am\, \psi i.$$

Die Curven $\psi = \text{const}$ schneiden also die σ-Axe in zwei Punkten σ_1 und σ_2. Das Product dieser beiden Abstände

$$\sigma_1 \sigma_2 = \Delta^2\, am\, \psi i - k^2 \cos^2 am\, \psi i = 1 - k^2$$

ist unabhängig von ψ, also für alle Curven von derselben Grösse. Geht man vom Punkte $\varphi = 0$ aus, so erhält man eine Curve, für die τ positiv bleibt bis φ den Werth $2K$ erreicht, von da ab wird $\sin am\, \varphi$ negativ und auch τ negativ bis für $\varphi = 4K$ wieder der Ausgangspunkt erreicht ist. Wir erhalten so eine geschlossene Curve, die ganz auf der Seite der positiven σ liegt. Da $\sigma_1 \sigma_2 = 1 - k^2$ ist, so schneidet die Curve, welche durch $\sigma = 0$ geht, die σ-Axe zum zweiten Mal im Unendlichen.

Für $(\varphi + \psi i) = iK'$ und $= 2K + iK'$ werden die elliptischen Functionen unendlich.

Setzen wir $(\varphi + \psi i) = (\varphi - i\psi_1) + iK'$ und berücksichtigen, dass

$$\cos am(\alpha + iK') = -\frac{i}{k}\frac{\Delta\, am\, \alpha}{\sin am\, \alpha},\quad \cos am(\alpha + 2K + iK') = \frac{i}{k}\frac{\Delta\, am\, \alpha}{\sin am\, \alpha},$$

$$\Delta\, am\,(\alpha + iK') = -i\frac{\cos am\, \alpha}{\sin am\, \alpha},\quad \Delta\, am(\alpha + 2K + iK') = -i\frac{\cos am\, \alpha}{\sin am\, \alpha},$$

so ergiebt sich 57)

$$\sigma + \tau i = -i\left(\frac{\cos am\,(\varphi - \psi_1 i)}{\sin am\,(\varphi - \psi_1 i)} - \frac{\Delta\, am\,(\varphi - \psi_1 i)}{\sin am\,(\varphi - \psi_1 i)}\right).$$

Nun ist bekanntlich

$$\sin am\, \alpha = \alpha - \frac{1+k^2}{1.2.3}\alpha^3 + \frac{1+14k^2+k^4}{1.2.3.4.5}\alpha^5 \ldots.$$

$$\cos am\, \alpha = 1 - \frac{1}{1.2}\alpha^2 + \frac{1+4k^2}{1.2.3.4}\alpha^4 \ldots..$$

$$\Delta\, am\, \alpha = 1 - \frac{k^2}{1.2}\alpha^2 + \frac{k^2(4+k^2)}{1.2.3.4}\alpha^4 \ldots..$$

Lassen wir φ und ψ_1 gegen Null convergiren, so ist

$$\sigma + \tau i = +i\,\frac{\left((\varphi - i\psi_1)^2\,\frac{1-k^2}{2}\right)}{\varphi - i\psi_1} = \frac{i}{2}(\varphi - i\psi_1)(1-k^2),$$

also

$$\sigma = +\frac{\psi_1}{2}(1-k^2),\quad \tau = \frac{\varphi}{2}(1-k^2).$$

Nun war

$$x + iy = \frac{a}{k}\log(\sigma + \tau i),\quad \sigma + \tau i = e^{\frac{k}{a}(x+yi)}.$$

Daraus folgt

$$x = \frac{a}{k}\log\sqrt{\sigma^2 + \tau^2},$$
$$y = \frac{a}{k}\operatorname{arctg}\frac{\tau}{\sigma}. \qquad 58)$$

Da die Curven $\psi = \text{const}$ alle auf der Seite der positiven σ liegen, so befindet sich der Pol $\sigma = 0$, $\tau = 0$ des Radiusvector $\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ ausserhalb dieser Curven. Lassen wir den Radiusvector einen Umlauf auf der Curve machen, so geht $\operatorname{arctg}\frac{\tau}{\sigma}$ und

damit y bis zu einem Maximum, kehrt dann um, geht zu einem Minimum und kehrt schliesslich zu dem anfänglichen Werth zurück. Dasselbe ist mit der Grösse $\sqrt{\sigma^2+\tau^2}$ der Fall. In der xy-Ebene erhalten wir also eine geschlossene Curve.

In der Nähe des Werthes $\sigma=\tau=0$ war

$$\sigma^2+\tau^2=\frac{(\varphi^2+\psi_1^2)}{4}(1-k^2)^2,\quad \frac{\tau}{\sigma}=+\frac{\varphi}{\psi_1}.$$

Also ist

$$x=\frac{a}{k}\log\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{\varphi^2+\psi_1^2}\,(1-k^2)\right], \tag{59}$$

$$y=\frac{a}{k}\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{\psi_1}.$$

Wenn also φ und ψ_1 sich der Null nähern, wird x negativ unendlich.

Setzen wir

$$\varphi+\psi i=2K+\varphi_1-\psi_1 i+iK',$$

so wird nach den Formeln 56) und 57)

$$\sigma+\tau i=-i\left\{\frac{\cos am(\varphi_1-i\psi_1)}{\sin am(\varphi_1-i\psi_1)}+\frac{\varDelta am(\varphi_1-i\psi_1)}{\sin am(\varphi_1-i\psi)}\right\},$$

also für verschwindende Werthe von $(\varphi_1-i\psi_1)$

$$\sigma+\tau i=-\frac{2i}{(\varphi_1-i\psi_1)}=-\frac{2i(\varphi_1+i\psi_1)}{(\varphi_1^2+\psi_1^2)},$$

also

$$\sigma=\frac{2\psi_1}{(\varphi_1^2+\psi_1^2)},\quad \tau=-\frac{2\varphi_1}{(\varphi_1^2+\psi_1^2)},\quad \sigma^2+\tau^2=\frac{4}{(\varphi_1^2+\psi_1^2)}. \tag{60}$$

Es wird also für verschwindende Werthe von φ_1 und ψ_1

$$x=\frac{a}{k}\log\frac{2}{\sqrt{\varphi_1^2+\psi_1^2}}, \tag{61}$$

demnach unendlich für $\varphi_1=\psi_1=0$.

Für endliche Werthe von φ_1 und verschwindende von ψ_1 erhalten wir

$$\sin am\,\psi i=\sin am(K'-\psi_1)i=-\frac{1}{k}\,\frac{1}{\sin am\,\psi_1 i},$$

also nach Gleichung 56) und den Formeln 57)

$$\sigma=i\,\frac{(\cos am\,\varphi_1\,\varDelta\,am\,\psi_1 i-\varDelta\,am\,\varphi_1\cos am\,\psi_1 i)}{\sin^2 am\,\varphi_1}\sin am\,\psi_1 i,$$

$$i\tau=\frac{\sin am\,\varphi_1\,.\,\sigma}{\sin am\,\psi_1 i}$$

also für $\psi_1 = 0$

$$\sigma = +\frac{i \sin am\, \psi_1 i}{\sin^2 am\, \varphi_1}(\cos am\, \varphi_1 - \Delta\, am\, \varphi_1),$$

$$\tau = \frac{\Delta\, am\, \varphi_1 - \cos am\, \varphi_1}{\sin am\, \varphi_1}.$$

Hier ist σ stets Null, dagegen τ endlich.

Für $\psi_1 = K'$ entsprechen daher endlichen Werthen von φ_1 endliche Werthe von τ und $\sigma = 0$.

Eliminiren wir φ_1 aus der Gleichungen 59), so erhalten wir

$$\sigma^2 + \tau^2 = \frac{2\sigma}{\psi_1} \quad \text{oder}$$

$$\left(\sigma - \frac{1}{\psi_1}\right)^2 + \tau^2 = \frac{1}{\psi_1^2}.$$

Wir haben also einen Kreis, der den unendlich grossen Radius $\frac{1}{\psi_1}$ hat und dessen Mittelpunkt im Abstand $\frac{1}{\psi_1}$ vom Punkte $\sigma = 0$, $\tau = 0$ auf der σ-Axe liegt.

Dieser Kreis entspricht dem Stück von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 4K$, der Linie $\psi_1 = K$, der $\varphi\psi$-Ebene, während demselben Stück der Linie $\psi_1 = \frac{K'}{2}$ die geschlossene Curve entspricht, an welcher in der xy-Ebene der Druck constant ist.

In der xy-Ebene ist diese letztere ebenfalls eine geschlossene Curve, während dem unendlich grossen Kreise zwei gerade Linien entsprechen mit den Gleichungen $y = \pm \frac{\pi a}{2K}$, da $\pm \infty$ die äussersten Werthe sind, die $\operatorname{tg} \frac{\tau}{\sigma}$ erreicht.

Diese äusseren geraden Begrenzungslinien sind als feste Wände zu denken.

Die Werthe, welche die Geschwindigkeit der Flüssigkeit dort hat, untersuchen wir in folgender Weise.

In der Nähe des Werthes $\sigma = \tau = 0$ war $\varphi = \psi_1 = 0$ und nach 58)

$$x = \frac{a}{k} \log\left[\tfrac{1}{2} \sqrt{\varphi^2 + \psi_1^2}\,(1 - k^2)\right].$$

Nun ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\frac{\partial x}{\partial\varphi}}{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2} = \frac{k}{a}\varphi, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial\psi}}{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2} = -\frac{k}{a}\psi_1.$$

Die Geschwindigkeiten werden also mit φ und ψ_1 Null. In der Nähe des Werthes $\varphi_1 = \psi_1 = 0$ war nach 60)

$$x = \frac{a}{k} \log \frac{2}{\sqrt{\varphi_1^2 + \psi_1^2}},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{k}{a} \varphi_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{k}{a} \psi_1.$$

Auch hier nähern sich die Geschwindigkeiten mit abnehmenden φ_1 und ψ_1 dem Werthe Null.

Alle unendlich grossen Werthe von x werden nun, wie wir gesehen haben, durch die Umgebung dieser Punkte dargestellt. Im Unendlichen ruht also die Flüssigkeit.

Ferner ist nach 54) für endliche Werthe von φ und

$$i\psi = i(K' - \psi_1)$$

in der Nähe von $\psi_1 = 0$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{a}{k} \frac{\cos am\, \psi_1 i\, \Delta\, am\, \psi_1 i}{\sin am\, \varphi},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -i \frac{a}{k} \frac{\cos am\, \varphi\, \Delta\, am\, \varphi}{\sin^2 am\, \varphi} \sin am\, \psi_1 i.$$

Für $\psi_1 = 0$ ist demnach

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{a}{k} \frac{1}{\sin am\, \varphi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = 0$$

und daher

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{k}{a} \sin am\, \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

An den im Endlichen liegenden festen Wänden strömt die Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit $\frac{k}{a} \sin am\, \varphi$, also an beiden in entgegengesetzter Richtung.

Die Form der Curven für die freie Grenze hängt vom dem Modul k der elliptischen Functionen ab.

Setzen wir den zu diesen Curven gehörenden Werth $\psi_1 = \frac{K'}{2}$ in die Gleichungen 58) ein, so erhalten wir

$$x = \frac{a}{k} \log \frac{\sqrt{1+k}\,(\Delta\, am\, \varphi - \sqrt{k} \cos am\, \varphi)}{\sqrt{1 + k \sin^2 am\, \varphi}},$$

$$y = \frac{a}{k} \operatorname{arctg} \sqrt{k} \sin am\, \varphi.$$

Verschieben wir den Nullpunkt um die Strecke $\frac{a}{k} \log \sqrt{1+k}$

in der Richtung der x-Axe, so erhalten wir, wenn wir $\sqrt{k}\sin am\,\varphi = \varkappa$ setzen

$$x = \frac{a}{k}\log\frac{\sqrt{1-\varkappa^2 k} \mp \sqrt{k-\varkappa^2}}{\sqrt{1+\varkappa^2}},$$

$$y = \pm\frac{a}{k}\operatorname{arctg}\varkappa.$$

Durch Elimination von $\varkappa$ ergiebt sich

$$x = \frac{a}{k}\log\left[\sqrt{\cos^2\frac{ky}{a}(1+k) - k} \mp \sqrt{\cos^2\frac{ky}{a}(1+k) - 1}\right].$$

Hieraus geht zunächst hervor, dass die Curve symmetrisch zur x-Axe liegt, weil die Abstände y auf der positiven und negativen Seite gleich gross sind.

Für $\varkappa = 0$ ist $y = 0$

$$x = \frac{a}{k}\log(1 \mp \sqrt{k}).$$

Dies sind die grössten und kleinsten Werthe von x.

Für $\sin am\,\varphi = 1$ ist $\varkappa = \sqrt{k}$,

$$x = \frac{a}{2k}\log\frac{1-k^2}{1+k} = \frac{a}{2k}\log(1-k),$$

$$y = \pm\frac{a}{k}\operatorname{arctg}\sqrt{k}.$$

Dies sind die Grenzwerthe von y.

Da

$$\frac{a}{k}\left(\log\frac{\sqrt{1-k\varkappa^2}+\sqrt{k-\varkappa^2}}{\sqrt{1+\varkappa^2}} + \log\frac{\sqrt{1-k\varkappa^2}-\sqrt{k-\varkappa^2}}{\sqrt{1+\varkappa^2}}\right)$$
$$= \frac{a}{k}\log(1-k)$$

ist, so liegt die Curve symmetrisch zur Linie

$$x = \frac{a}{2k}\log(1-k).$$

In Figur 7 und 8 sind die beiden Curven constanten Drucks, die dem Modul $k = \frac{1}{2}$ und $k = 0{,}01$ entsprechen, gezeichnet. Für den Grenzwerth $k = 1$ wird der eine Werth von x immer unendlich gross, der andere bleibt endlich und zwar

$$x = \frac{a}{k}\log 2\frac{\sqrt{1-\varkappa^2}}{\sqrt{1+\varkappa^2}}.$$

Die Grenzwerthe von y sind $y = \pm \frac{a}{k} \frac{\pi}{4}$, während die festen Wände bei $y = \pm \frac{a}{k} \frac{\pi}{2}$ liegen.

Die Curve erstreckt sich einseitig ins Unendliche. Sie ist in Fig. 9 gezeichnet.

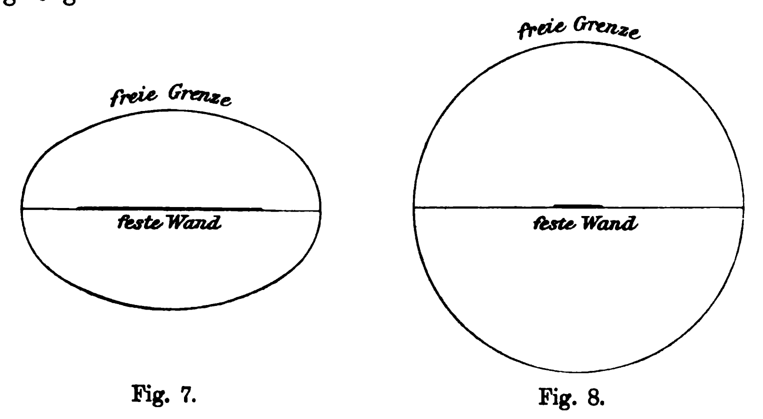


Fig. 7. Fig. 8.

Wenn k gegen Null convergirt, wird

$$x = \frac{a}{k} \sqrt{k \cos^2 \frac{k}{a} y - \sin^2 \frac{k}{a} y}$$

$$= \frac{a}{k} \sqrt{k - \frac{k^2}{a^2} y^2} = \sqrt{\frac{a^2}{k} - y^2}.$$

Die Curve ist also ein Kreis vom Radius $\frac{a}{\sqrt{k}}$. Die Wände liegen hier im Unendlichen.

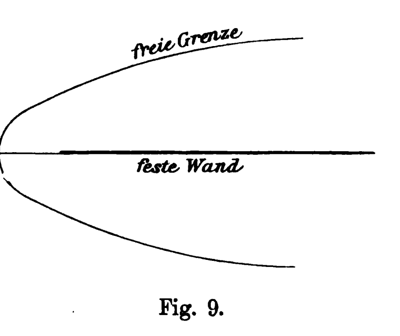


Fig. 9.

Innerhalb des Raumes, der von der betrachteten Stromlinie begrenzt wird, kann, wie schon erwähnt, die Flüssigkeit ruhend angenommen werden. An der Unstetigkeitsfläche muss der Druck beiderseits constant sein.

Im Unendlichen ruht die Flüssigkeit. Wenn dort der constante Druck p_0 herrscht, so ist der Druck an der Unstetigkeitsfläche nach 36a) und 55)

$$p = p_0 - \tfrac{1}{2} s \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] = p_0 - \frac{s}{2} \frac{k}{a^2}.$$

Herrscht in der innern ruhenden Flüssigkeit der Druck p'_0, so muss

$$p'_0 = p_0 - \frac{s}{2}\frac{k}{a^2}$$

sein. Haben wir z. B. eine Geschwindigkeit an der Unstetigkeitsfläche von $20 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, so würde, wenn wir die Dichtigkeit der Luft im Vergleich zum Wasser gleich $\frac{1}{773}$ annehmen, bei einem Druck $p_0 = 760$ mm Quecksilber

$$p'_0 = 758{,}1 \text{ mm Hg sein.}$$

Man sieht hieraus, dass auch bei starken Winden die Aenderungen des Barometerstandes durch rein dynamische Wirkungen gering sind.

Auch der innere Raum ist, wenn wir unsere Functionen in ihn hinein fortgesetzt denken, von einer bestimmten Flüssigkeitsbewegung erfüllt. In diesem Falle könnte die Flüssigkeit im äussern Raum ruhen. Wir haben dann die Variabeln ψ von 0 bis $\frac{K'}{2}$ gehen zu lassen.

Ist $\psi = 0$, so haben wir nach 56)

$$\tau = 0, \qquad \sigma = \Delta\, am\, \varphi - k \cos am\, \varphi.$$

Aendert sich φ von 0 bis $4K$, so durchläuft der entsprechende Punkt in der $\sigma\tau$-Ebene die Strecke von $1 - k$ bis $1 + k$ auf der σ-Axe hin und zurück. In der xy-Ebene entspricht dies der Strecke zwischen den Punkten

$$x = \frac{a}{k} \log (1 - k) \quad \text{und} \quad x = \frac{a}{k} \log (1 + k).$$

Diese Strecke kann also die Schnittlinie einer festen Wand mit der xy-Ebene sein, die die Breite $\frac{a}{k} \log \frac{1+k}{1-k}$ hat.

Für $\psi = 0$ ist

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = a \sin am\, \varphi, \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}} = \frac{1}{a \sin am\, \varphi}.$$

In der Nähe von $\varphi = 0$, $\psi = 0$ ist

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} + i \frac{\partial y}{\partial \varphi} = a (\varphi + i\psi),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\varphi}{a(\varphi^2+\psi^2)}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\psi}{a(\varphi^2+\psi^2)},$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{a\sqrt{(\varphi^2+\psi^2)}}.$$

Dort, wo die Flüssigkeit den scharfen Rand der Wand zu umfliessen hat, wird die resultirende Geschwindigkeit unendlich. Die Stromlinien schmiegen sich der festen Wand beiderseits an und die Geschwindigkeit ist an jedem Punkte der Wand an beiden Seiten von gleicher Grösse und entgegengesetzter Richtung.

In den Figuren ist die feste Wand im innern Raum eingezeichnet.

Dass die Bewegungsgleichungen der Flüssigkeiten sich wesentlich vereinfachen, wenn die Geschwindigkeiten partielle Ableitungen einer Function sind, war schon Euler und Lagrange bekannt. Die älteren Mathematiker haben daher hydrodynamische Probleme fast nur unter dieser Voraussetzung behandelt. Thatsächlich kommt diesen Bewegungen eine besondere Bedeutung insofern zu, als sie diejenigen sind, die ausschliesslich durch conservative Kräfte hervorgerufen werden können. Sie spielen daher in der Natur eine bedeutende Rolle, solange von nicht conservativen Vorgängen, wie Reibung und Wärmeleitung, abgesehen werden kann.

Die Bewegung einer Kugel in einer Flüssigkeit ist zuerst von Dirichlet behandelt (Berl. Monatsber. 1852), die eines Ellipsoids von Clebsch (Crelle, Bd. 52 und 53).

Die Bewegung bestimmter Formen des Ringes in einer Flüssigkeit ist von Hicks (Phil. Trans. 1881) und Dyson (Phil. Trans. 1893) behandelt.

Für die discontinuirlichen Bewegungen ist das erste Beispiel von Helmholtz gegeben (Ges. Abh. I, S. 146). Die oben gegebenen drei Beispiele rühren von Kirchhoff her (Ges. Abh., S. 420 und Mechanik 22 Vorles.). Die Methode, für die Zusammenziehung eines ausfliessenden cylindrischen Strahles obere und untere Grenzwerthe abzuleiten, ist von F. Kötter entwickelt (Arch. d. Math. u. Phys. [2] Bd. 5).

Die Verwendung der Kirchhoff'schen Betrachtungen über den Druck, den ein Flüssigkeitsstrahl auf eine feste Wand ausübt, auf den Widerstand, den ein mit constanter Geschwindigkeit bewegter Körper, durch Bildung von Unstetigkeitsflächen

in der Flüssigkeit erfährt, rührt von Lord Rayleigh her (Phil. Mag. Dez. 1876).

Eine weitere Bearbeitung des Problems der festen Wand hat Bobyleff gegeben (Wied. Beibl. VI, S. 163). Er untersucht den Druck, den ein Flüssigkeitsstrahl auf eine feste Wand ausübt, die von zwei gleich grossen Ebenen, die unter einem Winkel zusammenstossen, gebildet wird.

Während das Ergebniss der Theorie, dass bei continuirlicher Bewegung der Flüssigkeit ein Körper in einer reibungslosen Flüssigkeit überhaupt keinen Widerstand erfährt, in schroffem Widerspruch mit der Erfahrung steht, scheint die Annahme, dass ein solcher Widerstand durch Bildung von Unstetigkeitsflächen hervorgerufen wird, diesen Mangel an Uebereinstimmung erheblich zu verringern. (Vgl. die Experimente von Vince, Phil. Transact. 1798 und die Berechnung von Lord Rayleigh, a. a. O.)

Eine Methode, die Flüssigkeitsstrahlen ohne Anwendung der Functionen complexer Variabeln zu behandeln, rührt von Planck her (Wied. Ann. 21, S. 499, 1884); doch ist es bisher nicht gelungen, dadurch zur Ableitung neuer Fälle von Strahlbildung zu gelangen.

IV. Die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit.

§ 1.

Bewegung in einfach zusammenhängenden Räumen.

Die Differentialgleichungen der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit, die einen einfach zusammenhängenden Raum erfüllt, sind von Thomson und Tait und Kirchhoff zuerst aufgestellt worden.

Wir werden der Darstellungsweise Kirchhoff's folgen und einige Ergebnisse der neueren Forscher anschliessen, die sich auf Grund der Kirchhoff'schen Analyse vielfach mit diesem Problem beschäftigt haben. Die Flüssigkeit sei incompressibel, reibungslos und ohne Wirbel.

Kirchhoff hat die allgemeinen Differentialgleichungen aus dem Hamilton'schen Princip abgeleitet. Wir wollen die immerhin langwierige Entwicklung hier nicht wiederholen, sondern die mathematische Form der Gleichungen aus ihnen ohne weiteres einleuchtenden Aussagen ableiten.

Das Coordinatensystem der x, y, z soll mit dem Körper fest verbunden bleiben; u, v, w sind die Componenten der Geschwindigkeit, p, q, r die der Drehungsgeschwindigkeit des festen Körpers. Ferner bezeichnen wir mit $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ die Bewegungsmomente der entsprechenden Bewegungen, so dass wir haben

$$\begin{aligned} \mathfrak{u} &= \frac{\partial L}{\partial u}, \quad \mathfrak{v} = \frac{\partial L}{\partial v}, \quad \mathfrak{w} = \frac{\partial L}{\partial w}, \\ \mathfrak{p} &= \frac{\partial L}{\partial p}, \quad \mathfrak{q} = \frac{\partial L}{\partial q}, \quad \mathfrak{r} = \frac{\partial L}{\partial r}, \end{aligned} \tag{1}$$

wenn wir unter L die lebendige Kraft des ganzen bewegten Systems verstehen.

Ist anfänglich keine Drehung vorhanden, so tritt doch bei der Vorwärtsbewegung des Körpers im allgemeinen eine Drehung ein.

Während dt rückt der Körper um die Strecke $u\,dt$, $v\,dt$, $w\,dt$ vor. Der Zuwachs, den das Bewegungsmoment der Drehung um die x-Axe $\mathfrak{p}$ erfährt, ist $\mathfrak{v}w\,dt - \mathfrak{w}v\,dt$.

Besitzt der Körper schon Drehungsbewegung, so drehen sich die Axen des Coordinatensystems mit und es tritt eine entsprechende Aenderung der Bewegungsmomente ein.

Die Richtung der x-Axe nach Ablauf von dt bildet mit der ursprünglichen Richtung der y- und z-Axe Winkel, deren Cosinus die Werthe haben

$$r\,dt \text{ und } -q\,dt.$$

Die Aenderung des Bewegungsmoments $\mathfrak{u}$ hierdurch ist

$$\mathfrak{v}r\,dt - \mathfrak{w}q\,dt.$$

Diejenige des Moments $\mathfrak{p}$ ist

$$\mathfrak{q}r\,dt - \mathfrak{r}q\,dt.$$

Nennen wir X, Y, Z, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ die Componenten der äusseren Kräfte, die die Momente $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ zu vergrössern streben, so ist

$$\frac{d\mathfrak{u}}{dt} = \mathfrak{v}r - \mathfrak{w}q + X, \quad \frac{d\mathfrak{p}}{dt} = w\mathfrak{v} - v\mathfrak{w} + \mathfrak{q}r - \mathfrak{r}q + \mathfrak{L}$$

und ebenso

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{w}p - \mathfrak{u}r + Y, \quad \frac{d\mathfrak{q}}{dt} = u\mathfrak{w} - w\mathfrak{u} + \mathfrak{r}p - \mathfrak{p}r + \mathfrak{M}, \tag{2}$$

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dt} = \mathfrak{u}q - \mathfrak{v}p + Z, \quad \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = v\mathfrak{u} - u\mathfrak{v} + \mathfrak{p}q - \mathfrak{q}p + \mathfrak{N}.$$

Wirken keine äusseren Kräfte, so erhält man eine Lösung dieser Differentialgleichungen, wenn man setzt

$$p = q = r = 0 \quad \text{und}$$

$$u : v : w = \mathfrak{u} : \mathfrak{v} : \mathfrak{w},$$

dann folgt aus den Gleichungen 1) und 2), dass u, v, w constant sind.

Wir nehmen ausser dem mit dem Körper verbundenen Coordinatensystem noch ein zweites, im Raume festes, an: das der x_1, y_1, z_1.

Ist $s\,dx'\,dy'\,dz'$ die Masse eines Theils des ganzen Systems, so ist nach dem Hamilton'schen Princip allgemein

$$\left[s\int\int\int dx'\,dy'\,dz'\left(\frac{dx_1}{dt}\,\delta x_1 + \frac{dy_1}{dt}\,\delta y_1 + \frac{dz_1}{dt}\,\delta z_1\right)\right]_{t_0}^{t_1} = \delta\int_{t_0}^{t_1}(F-L)\,dt, \quad 3)$$

wo L die lebendige Kraft, F die potentielle Energie bezeichnet. Verschwinden die Variationen δx_1, δy_1, δz_1 für $t = t_0$ und $t = t_1$, so erhält man die übliche Form des Princips. Wir können die Variationen zur Zeit t_0 beliebig vorschreiben, durch die Variationen, die wir dem festen Körper auflegen, sind aber die Variationen der Flüssigkeit zur Zeit t mitbestimmt und nicht mehr verfügbar. Da aber ein Geschwindigkeitspotential existiren soll, so ist

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \quad \frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial y_1} \quad \frac{dz_1}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial z_1},$$

also die linke Seite von 3) wird bei partieller Integration

$$s\int\int\int dx'\,dy'\,dz'\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,\delta x_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\,\delta y_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial z_1}\,\delta z_1\right)$$

$$= s\int dS\varphi\,(\delta x_1 \cos nx_1 + \delta y_1 \cos ny_1 + \delta z_1 \cos nz_1)$$

$$- s\int\int\int \varphi\left(\frac{\partial\delta x_1}{\partial x} + \frac{\partial\delta y_1}{\partial y} + \frac{\partial\delta z_1}{\partial z}\right) dx'\,dy'\,dz'.$$

Nun ist

$$\frac{\partial\delta x_1}{\partial x} + \frac{\partial\delta y_1}{\partial y} + \frac{\partial\delta z_1}{\partial z} = 0,$$

wenn die Flüssigkeit nicht zusammendrückbar ist, und an der Oberfläche verschwindet die Variation normal zur Oberfläche

$$\delta x_1 \cos nx_1 + \delta y_1 \cos ny_1 + \delta z_1 \cos nz_1,$$

weil die Oberfläche vorgeschriebene Gestalt hat, also ist auch die linke Seite der Gleichung 3) gleich Null.

Die lebendige Kraft des festen Körpers ist eine homogene Function zweiten Grades von u, v, w, p, q, r mit constanten Coefficienten. Nun ist die lebendige Kraft der Flüssigkeit

$$\frac{s}{2}\int\int\int dx'\,dy'\,dz'\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]$$

eine Function von derselben Art.

Es ist also die gesammte lebendige Kraft eine homogene Function zweiten Grades von u, v, w, p, q, r. Sind nun p, q, r Null und betrachtet man u, v, w als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes, so ist die Gleichung

$$L = \text{const}$$

die Gleichung eines Ellipsoids. Lässt man die Coordinataxen in die Hauptaxen a, b, c fallen und ebenso die Mittelpunkte übereinstimmen, so ist

$$2L = au^2 + bv^2 + cw^2,$$

$$\mathfrak{u} = au, \qquad \mathfrak{v} = bv, \qquad \mathfrak{w} = cw.$$

In diesem und nur in diesem Falle verschwinden, wenn nur u von Null verschieden ist, $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$. Es verschwinden dann $\frac{d\mathfrak{p}}{dt}, \frac{d\mathfrak{q}}{dt}, \frac{d\mathfrak{r}}{dt}$, so dass also der Körper keine Drehung erfährt. Dasselbe gilt, wenn nur v oder w von Null verschieden ist.

In jedem festen Körper lässt sich ein dreiaxiges Ellipsoid construiren, dessen Axen die ausgezeichnete Eigenschaft haben, dass der Körper in ihrer Richtung ohne Drehung durch die Flüssigkeit fortschreiten kann.

Die lebendige Kraft ist nach dem Vorausgehenden von folgender Form

$$\begin{aligned} 2L = a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + 2a_{14}up + 2a_{15}uq + 2a_{16}ur \\ + a_{22}v^2 + 2a_{23}vw + 2a_{24}vp + 2a_{25}vq + 2a_{26}vr \\ + a_{33}w^2 + 2a_{34}wp + 2a_{35}wq + 2a_{36}wr \\ + a_{44}p^2 + a_{55}q^2 + a_{66}r^2 + 2a_{45}pq + 2a_{46}pr + 2a_{56}qr. \end{aligned} \tag{4}$$

Die Zahl der Constanten a beträgt 21.

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{u} &= \frac{\partial L}{\partial u} = a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w + f_1 \qquad & f_1 &= a_{14}p + a_{15}q + a_{16}r \\ \mathfrak{v} &= \frac{\partial L}{\partial v} = a_{12}u + a_{22}v + a_{23}w + f_2 \quad \text{4a)} & f_2 &= a_{24}p + a_{25}q + a_{26}r \quad \text{4b)} \\ \mathfrak{w} &= \frac{\partial L}{\partial w} = a_{13}u + a_{23}v + a_{33}w + f_3 & f_3 &= a_{34}p + a_{35}q + a_{36}r. \end{aligned}$$

Lösen wir diese Gleichungen in Bezug auf u, v, w auf, indem wir $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ als neue Unbekannte einführen, so erhalten wir

$$u = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & f_1 - \mathfrak{u} \\ a_{22} & a_{23} & f_2 - \mathfrak{v} \\ a_{23} & a_{33} & f_3 - \mathfrak{w} \end{vmatrix} \qquad v = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & f_1 - \mathfrak{u} \\ a_{12} & a_{23} & f_2 - \mathfrak{v} \\ a_{13} & a_{33} & f_3 - \mathfrak{w} \end{vmatrix}$$

$$w = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & f_1 - \mathfrak{u} \\ a_{12} & a_{22} & f_2 - \mathfrak{v} \\ a_{13} & a_{23} & f_3 - \mathfrak{w} \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{u}} &= \frac{\partial L}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \mathfrak{u}} + \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \mathfrak{u}} + \frac{\partial L}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \mathfrak{u}} \\ &= \mathfrak{u}\frac{\partial u}{\partial \mathfrak{u}} + \mathfrak{v}\frac{\partial v}{\partial \mathfrak{u}} + \mathfrak{w}\frac{\partial w}{\partial \mathfrak{u}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Da nun p, q, r nur in den f vorkommen, diese aber bei der Bildung der Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial \mathfrak{u}}$, $\frac{\partial v}{\partial \mathfrak{u}}$, $\frac{\partial w}{\partial \mathfrak{u}}$ herausfallen, so ist $\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{u}}$ unabhängig von p, q, r, demnach

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \mathfrak{u}\,\partial p} = \frac{\partial^2 L}{\partial \mathfrak{u}\,\partial q} = \frac{\partial^2 L}{\partial \mathfrak{u}\,\partial r} = 0.$$

Dasselbe gilt für die Grössen $\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{v}}$, $\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{w}}$. Es können also in dem Ausdruck für L als Function von $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, p, q, r keine Glieder von der Form $\mathfrak{u}p$ u. s. w. vorkommen.

Er zerfällt also in zwei Theile, von denen der eine eine homogene quadratische Form von $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, der andere eine solche von p, q, r ist. Wir setzen

$$L = E(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) + G(p, q, r).$$

Man kann nun dem Ausdruck für L durch Verlegung des Coordinatensystems an einen ausgezeichneten Punkt im Körper besondere Eigenschaften zutheilen.

Dieser Punkt hat die Coordinaten

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial q} - \frac{\partial v}{\partial r}\right), \quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial p}\right), \quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial q}\right).$$

Diese Differenzen sind also Null, wenn wir den Punkt mit dem Anfangspunkt der Coordinaten zusammenfallen lassen.

Hiernach ist also

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{15} \\ a_{12} & a_{22} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & a_{35} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{16} \\ a_{12} & a_{23} & a_{26} \\ a_{13} & a_{33} & a_{36} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{16} \\ a_{22} & a_{23} & a_{26} \\ a_{23} & a_{33} & a_{36} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{34} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{23} & a_{33} & a_{35} \end{vmatrix}.$$

Wir wollen zur Abkürzung diese Gleichungen schreiben

$$D_{23} = D_{32}, \quad D_{31} = D_{13}, \quad D_{12} = D_{21}. \tag{6)}$$

Wenn wir jetzt $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, p, q, r als unabhängige Variable betrachten, so ist

$$\frac{\partial G}{\partial p} = \frac{\partial L}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p} + \frac{\partial L}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial p} + \frac{\partial L}{\partial p},$$

wo $\frac{\partial L}{\partial p}$ der Differentialquotient nach p von L, als Function von u, v, w, p, q, r betrachtet, sein soll.

Es ist also nach 1)

$$\frac{\partial G}{\partial p} - \mathfrak{p} = \mathfrak{u}\frac{\partial u}{\partial p} + \mathfrak{v}\frac{\partial v}{\partial p} + \mathfrak{w}\frac{\partial w}{\partial p}.$$

Bezeichnen wir die Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ a_{12} & a_{23} & a_{25} \\ a_{13} & a_{33} & a_{35} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{13} & a_{23} & a_{36} \end{vmatrix} \tag{6a)}$$

mit D_{11}, D_{22}, D_{33}, so wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial p} - \mathfrak{p} &= \frac{D_{11}}{D}\mathfrak{u} + \frac{D_{12}}{D}\mathfrak{v} + \frac{D_{13}}{D}\mathfrak{w} \\ \frac{\partial G}{\partial q} - \mathfrak{q} &= \frac{D_{21}}{D}\mathfrak{u} + \frac{D_{22}}{D}\mathfrak{v} + \frac{D_{23}}{D}\mathfrak{w} \\ \frac{\partial G}{\partial r} - \mathfrak{r} &= \frac{D_{31}}{D}\mathfrak{u} + \frac{D_{32}}{D}\mathfrak{v} + \frac{D_{33}}{D}\mathfrak{w}. \end{aligned} \tag{7)}$$

Die Gleichungen 7) sind aber mit Rücksicht auf 6) gleichbedeutend mit den folgenden

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{w}}\left(\frac{\partial G}{\partial q}-\mathfrak{q}\right)=\frac{\partial}{\partial \mathfrak{v}}\left(\frac{\partial G}{\partial r}-\mathfrak{r}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{u}}\left(\frac{\partial G}{\partial r}-\mathfrak{r}\right)=\frac{\partial}{\partial \mathfrak{w}}\left(\frac{\partial G}{\partial p}-\mathfrak{p}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{v}}\left(\frac{\partial G}{\partial p}-\mathfrak{p}\right)=\frac{\partial}{\partial \mathfrak{u}}\left(\frac{\partial G}{\partial q}-\mathfrak{q}\right).$$

Die Grössen

$$\frac{\partial G}{\partial p}-\mathfrak{p}, \quad \frac{\partial G}{\partial q}-\mathfrak{q}, \quad \frac{\partial G}{\partial r}-\mathfrak{r}$$

sind hiernach gleich den partiellen Differentialquotienten einer Function F zu setzen. Und zwar ist

$$\begin{aligned} F=&\frac{1}{2D}\left(D_{11}\mathfrak{u}^2+D_{22}\mathfrak{v}^2+D_{33}\mathfrak{w}^2\right) \\ &+\frac{1}{D}\left(D_{12}\mathfrak{u}\mathfrak{v}+D_{13}\mathfrak{u}\mathfrak{w}+D_{23}\mathfrak{v}\mathfrak{w}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Der Ausdruck F verschwindet identisch, wenn die Grössen

$$a_{14},\ a_{24},\ a_{34},\ a_{15},\ a_{25},\ a_{35},\ a_{16},\ a_{26},\ a_{36}$$

verschwinden, was in einer besondern Eigenschaft des Körpers begründet ist.

Ebenso ergiebt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{u}} &= \frac{\partial L}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \mathfrak{u}}+\frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \mathfrak{u}}+\frac{\partial L}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \mathfrak{u}} \\ &= \mathfrak{u}\frac{\partial u}{\partial \mathfrak{u}}+\mathfrak{v}\frac{\partial v}{\partial \mathfrak{u}}+\mathfrak{w}\frac{\partial w}{\partial \mathfrak{u}} \\ &= -\frac{1}{D}\left\{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}\mathfrak{u}+\begin{vmatrix} a_{12} & a_{23} \\ a_{13} & a_{33}\end{vmatrix}\mathfrak{v}+\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23}\end{vmatrix}\mathfrak{w}\right\} \end{aligned} \tag{9}$$

oder

$$\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{u}}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & -\mathfrak{u} \\ a_{22} & a_{33} & -\mathfrak{v} \\ a_{23} & a_{33} & -\mathfrak{w}\end{vmatrix}.$$

Also ist

$$u-\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{u}}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & f_1 \\ a_{22} & a_{23} & f_2 \\ a_{23} & a_{33} & f_3\end{vmatrix}.$$

Diese Differenz ist frei von $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$. Mit Rücksicht auf die Gleichungen 4b) und 6a) können wir auch schreiben

$$u - \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{u}} = \frac{D_{11}}{D} p + \frac{D_{12}}{D} q + \frac{D_{13}}{D} r$$

und ebenso

$$v - \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{v}} = \frac{D_{12}}{D} p + \frac{D_{22}}{D} q + \frac{D_{23}}{D} r \tag{10}$$

$$w - \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{w}} = \frac{D_{13}}{D} p + \frac{D_{23}}{D} q + \frac{D_{33}}{D} r.$$

Setzen wir in F anstatt der Variabeln $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ die Variabeln p, q, r ein, so ist

$$u - \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{u}} = \frac{\partial F_1}{\partial p}, \quad v - \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{v}} = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \quad w - \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{w}} = \frac{\partial F_1}{\partial r}. \tag{11}$$

Betrachten wir L als Function der Variabeln $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$, so haben wir nach den Gleichungen 4a) und 4b)

$$u = \frac{1}{\mathfrak{D}} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & -\mathfrak{u} \\ a_{22} & . & . & . & . & -\mathfrak{v} \\ a_{23} & . & . & . & . & -\mathfrak{w} \\ a_{24} & . & . & . & . & -\mathfrak{p} \\ a_{25} & . & . & . & . & -\mathfrak{q} \\ a_{26} & . & . & . & . & -\mathfrak{r} \end{vmatrix} \qquad \mathfrak{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & . \\ a_{12} & . & . & . & . & . & . \\ a_{13} & . & . & . & . & . & . \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Nun ist

$$\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{u}} = \frac{\partial L}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \mathfrak{u}} + \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \mathfrak{u}} + \frac{\partial L}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \mathfrak{u}} + \frac{\partial L}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \mathfrak{u}} + \frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \mathfrak{u}} + \frac{\partial L}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \mathfrak{u}}$$

$$= \mathfrak{u}\frac{\partial u}{\partial \mathfrak{u}} + \mathfrak{v}\frac{\partial v}{\partial \mathfrak{u}} + \mathfrak{w}\frac{\partial w}{\partial \mathfrak{u}} + \mathfrak{p}\frac{\partial p}{\partial \mathfrak{u}} + \mathfrak{q}\frac{\partial q}{\partial \mathfrak{u}} + \mathfrak{r}\frac{\partial r}{\partial \mathfrak{u}},$$

also nach 12)

$$= u.$$

Ebenso ist $\qquad v = \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{v}}$ u. s. w. $\hfill$ 12a)

Hieraus und aus den Gleichungen 2) folgt für den Fall, dass keine äussern Kräfte wirken

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{u}}{dt} &= \mathfrak{v}\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{r}} - \mathfrak{w}\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{q}}, & \frac{d\mathfrak{p}}{dt} &= \mathfrak{v}\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{w}} - \mathfrak{w}\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{v}} + \mathfrak{q}\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{r}} - \mathfrak{r}\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{q}} \\ \frac{d\mathfrak{v}}{dt} &= \mathfrak{w}\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{p}} - \mathfrak{u}\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{r}}, & \frac{d\mathfrak{q}}{dt} &= \mathfrak{w}\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{u}} - \mathfrak{u}\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{w}} + \mathfrak{r}\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{p}} - \mathfrak{p}\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{r}} \\ \frac{d\mathfrak{w}}{dt} &= \mathfrak{u}\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{q}} - \mathfrak{v}\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{p}}, & \frac{d\mathfrak{r}}{dt} &= \mathfrak{u}\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{v}} - \mathfrak{v}\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{u}} + \mathfrak{p}\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{q}} - \mathfrak{q}\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{p}}. \end{aligned} \tag{13}$$

Differenziren wir diese Gleichungen nach $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ und addiren sie, so erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{u}}\left(\frac{d\mathfrak{u}}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{v}}\left(\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{w}}\left(\frac{d\mathfrak{w}}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{p}}\left(\frac{d\mathfrak{p}}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{q}}\left(\frac{d\mathfrak{q}}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}}\left(\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right) = 0\,.$$

Multipliciren wir die Gleichungen 13) der Reihe nach

erstens mit $u, v, w, p, q, r,$

dann mit $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, 0, 0, 0,$

endlich mit $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}\ \mathfrak{w},$

so erhalten wir erstens mit Rücksicht auf 12a)

$$u\frac{d\mathfrak{u}}{dt} + v\frac{d\mathfrak{v}}{dt} + w\frac{d\mathfrak{w}}{dt} + p\frac{d\mathfrak{p}}{dt} + q\frac{d\mathfrak{q}}{dt} + r\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = 0\,, \tag{14}$$

da aber L eine homogene Function zweiten Grades ist, so haben wir

$$\begin{aligned} 2L &= u\frac{\partial L}{\partial u} + v\frac{\partial L}{\partial v} + w\frac{\partial L}{\partial w} + p\frac{\partial L}{\partial p} + q\frac{\partial L}{\partial q} + r\frac{\partial L}{\partial r} \\ &= u\mathfrak{u} + v\mathfrak{v} + w\mathfrak{w} + p\mathfrak{p} + q\mathfrak{q} + r\mathfrak{r} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 2\frac{dL}{dt} &= \frac{du}{dt}\mathfrak{u} + \frac{dv}{dt}\mathfrak{v} + \frac{dw}{dt}\mathfrak{w} + \frac{dp}{dt}\mathfrak{p} + \frac{dq}{dt}\mathfrak{q} + \frac{dr}{dt}\mathfrak{r} \\ &\quad + u\frac{d\mathfrak{u}}{dt} + v\frac{d\mathfrak{v}}{dt} + w\frac{d\mathfrak{w}}{dt} + p\frac{d\mathfrak{p}}{dt} + q\frac{d\mathfrak{q}}{dt} + r\frac{d\mathfrak{r}}{dt}. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial L}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial L}{\partial w}\frac{dw}{dt} + \frac{\partial L}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial L}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial L}{\partial r}\frac{dr}{dt}.$$

Unsere Gleichung 14) giebt also bei Berücksichtigung von 1)

$$\frac{dL}{dt} = 0, \qquad L = \text{const.} \tag{15}$$

Zweitens erhalten wir

$$\mathfrak{u}\frac{d\mathfrak{u}}{dt} + \mathfrak{v}\frac{d\mathfrak{v}}{dt} + \mathfrak{w}\frac{d\mathfrak{w}}{dt} = 0 \tag{16}$$

und drittens

$$\mathfrak{p}\frac{d\mathfrak{u}}{dt} + \mathfrak{q}\frac{d\mathfrak{v}}{dt} + \mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{w}}{dt} + \mathfrak{u}\frac{d\mathfrak{p}}{dt} + \mathfrak{v}\frac{d\mathfrak{q}}{dt} + \mathfrak{w}\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = 0. \tag{17}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2 &= \text{const} \\ \mathfrak{p}\mathfrak{u} + \mathfrak{q}\mathfrak{v} + \mathfrak{r}\mathfrak{w} &= \text{const} \end{aligned}\right\} \tag{17a}$$

Bezeichnen wir die Cosinus der Winkel, welche die Axen des im Körper festen Coordinatensystems der x, y, z mit den Axen des im Raume festen Systems x_1, y_1, z_1 bilden, nach folgendem Schema

	x_1	y_1	z_1
x	α_1	β_1	γ_1
y	α_2	β_2	γ_2
z	α_3	β_3	γ_3 .

Die durch die x-Axe und x_1-Axe gelegte Ebene steht senkrecht auf der Axe der Drehung, welche den Winkel α_1 verändert. Also liegt diese Drehungsaxe in der yz-Ebene. Der Winkel α_1 wird daher durch die Drehungen r, q um die y- und um die z-Axe verändert. Nach der Zusammensetzung von Drehungen (vgl. S. 4) erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{array}{lll} \frac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_2 r - \alpha_3 q & \frac{d\beta_1}{dt} = \beta_2 r - \beta_3 q & \frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q \\ \frac{d\alpha_2}{dt} = \alpha_3 p - \alpha_1 r & \frac{d\beta_2}{dt} = \beta_3 p - \beta_1 r & \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3 p - \gamma_1 r \\ \frac{d\alpha_3}{dt} = \alpha_1 q - \alpha_2 p & \frac{d\beta_3}{dt} = \beta_1 q - \beta_2 p & \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p . \end{array} \qquad 18)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w \\ \frac{dy_1}{dt} &= \beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 w \\ \frac{dz_1}{dt} &= \gamma_1 u + \gamma_2 v + \gamma_3 w . \end{aligned} \qquad 19)$$

Zwischen den α, β, γ bestehen sechs Gleichungen nach 3) Abschn. I. Die obigen zusammen mit 2) achtzehn Gleichungen haben also zwölf von einander unabhängige Integrale, von denen wir drei bereits kennen. Sechs weitere Integrale ergiebt die Bedingung, dass die Componenten der Bewegungsmomente nach dem im Raume festen Coordinatensystem nach dem Satz vom Schwerpunkt, nicht von der Zeit abhängen dürfen, wenn keine Kräfte wirken. Bezeichnen wir mit a, β, γ die Coordinaten des Anfangspunktes der x, y, z in Bezug auf das System x_1, y_1, z_1, und berücksichtigen, dass ein Theil des Moments der Drehungsbewegung von den Momenten der fortschreitenden Bewegung veranlasst

wird, wenn die Anfangspunkte der Coordinatensysteme nicht zusammenfallen, so erhalten wir folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 \mathfrak{u} + \alpha_2 \mathfrak{v} + \alpha_3 \mathfrak{w} &= A \\ \beta_1 \mathfrak{u} + \beta_2 \mathfrak{v} + \beta_3 \mathfrak{w} &= B \\ \gamma_1 \mathfrak{u} + \gamma_2 \mathfrak{v} + \gamma_3 \mathfrak{w} &= C \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 \mathfrak{p} + \alpha_2 \mathfrak{q} + \alpha_3 \mathfrak{r} &= A' + B\gamma - C\beta \\ \beta_1 \mathfrak{p} + \beta_2 \mathfrak{q} + \beta_3 \mathfrak{r} &= B' + C\alpha - A\gamma \\ \gamma_1 \mathfrak{p} + \gamma_2 \mathfrak{q} + \gamma_3 \mathfrak{r} &= C' + A\beta - B\alpha , \end{aligned} \tag{21}$$

wo A, B, C, A', B', C' Constanten sind. Die Glieder $B\gamma - C\beta$ u. s. w. sind die Beiträge der fortschreitenden Bewegung zu den Momenten der Drehungsbewegung in Bezug auf das Coordinatensystem x_1, y_1, z_1. Durch passende Bestimmung der Lage der z-Axe lässt sich erreichen, dass die Constanten A, B verschwinden. Multiplicirt man dann die ersten drei Gleichungen der Reihe nach erstens mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, dann mit $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, endlich mit $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ und addirt sie jedesmal, so erhält man nacheinander

$$\gamma_1 = \frac{\mathfrak{u}}{C}, \qquad \gamma_2 = \frac{\mathfrak{v}}{C}, \qquad \gamma_3 = \frac{\mathfrak{w}}{C}. \tag{22}$$

Die neun Winkel, deren Cosinus wir mit den α, β, γ bezeichnet haben, kann man durch die Polarwinkel ersetzen, die sich durch die Gleichungen bestimmen

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \cos\chi \sin\Theta & \gamma_2 &= \sin\Theta \sin\chi & \gamma_3 &= \cos\Theta \\ \alpha_3 &= \cos\delta \sin\Theta & \beta_3 &= \sin\delta \sin\Theta & \gamma_3 &= \cos\Theta . \end{aligned} \tag{23}$$

χ und δ sind hier die geographische Länge, wenn einmal die z'-, dann die z-Axe als Erdaxe angesehen wird, während Θ die geographische Breite ist.

Es sind dann nach den Gleichungen 3) und 4) Abschnitt I

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\cos\delta \cos\chi \cos\Theta - \sin\delta \sin\chi \\ \beta_1 &= -\sin\delta \cos\chi \cos\Theta + \cos\delta \sin\chi \\ \alpha_2 &= -\cos\delta \sin\chi \cos\Theta + \sin\delta \cos\chi \\ \beta_2 &= -\sin\delta \sin\chi \cos\Theta - \cos\delta \cos\chi . \end{aligned} \tag{23 a}$$

Wir haben also

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \qquad \frac{d\delta}{\cos^2\delta} = \frac{\alpha_3\, d\beta_3 - \beta_3\, d\alpha_3}{\alpha_3^2}, \qquad d\delta = \frac{\alpha_3\, d\beta_3 - \beta_3\, d\alpha_3}{1 - \gamma_3^2}.$$

Andererseits ist nach 18)

$$d\beta_3 = (\beta_1 q - \beta_2 p)\, dt, \quad d\alpha_3 = (\alpha_1 q - \alpha_2 p)\, dt,$$

ausserdem nach 23) und 23a)

$$\gamma_1 = \beta_3 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_3, \quad \gamma_2 = \beta_1 \alpha_3 - \beta_3 \alpha_1, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Hieraus folgt

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\gamma_1 p + \gamma_2 q}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$$

und nach 22)

$$= C \frac{\mathfrak{u} p + \mathfrak{v} q}{\mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2}. \tag{24}$$

Denken wir uns zu α und β passende Constanten hinzugefügt, so können wir erreichen, dass A', B' verschwinden.

Die beiden ersten der Gleichungen 21) geben

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{C} (\beta_1 \mathfrak{p} + \beta_2 \mathfrak{q} + \beta_3 \mathfrak{r}) \\ \beta &= -\frac{1}{C} (\alpha_1 \mathfrak{p} + \alpha_2 \mathfrak{q} + \alpha_3 \mathfrak{r}), \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

während wir für γ aus 19) erhalten

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \gamma_1 u + \gamma_2 v + \gamma_3 w \\ &= \frac{1}{C} (u\mathfrak{u} + v\mathfrak{v} + w\mathfrak{w}). \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Wenn also u, v, w, p, q, r als Functionen der Zeit bekannt sind, so sind damit nach 22), 23), 24), 25), 26) $\chi, \delta, \Theta, \alpha, \beta, \gamma$ als Functionen der Zeit bestimmt und damit das Problem erledigt. Da wir neun Integrale der Gleichungen 13) gefunden haben, so sind zur vollständigen Integration nur noch drei Gleichungen erforderlich.

Gehen wir zunächst zu den Integralgleichungen 15) und 17a) zurück und setzen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2 &= \text{Const.} = J^2 \\ \mathfrak{u}\mathfrak{p} + \mathfrak{v}\mathfrak{q} + \mathfrak{w}\mathfrak{r} &= \text{Const.} = JJ_1. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Für stationäre Bewegungen verschwinden die linken Seiten der Gleichungen 2); daraus ergiebt sich

$$r\mathfrak{v} = q\mathfrak{w} \quad \text{u. s. w.} \qquad w\mathfrak{v} - v\mathfrak{w} + r\mathfrak{q} - q\mathfrak{r} = 0 \quad \text{u. s. w.},$$

oder wenn λ eine beliebige Constante bezeichnet

$$p = \lambda \mathfrak{u}, \qquad q = \lambda \mathfrak{v}, \qquad r = \lambda \mathfrak{w}.$$

Setzen wir diese Werthe in die drei letzten Gleichungen, so ergiebt sich

$$(u - \lambda\mathfrak{p})\,\mathfrak{v} = (v - \lambda\mathfrak{q})\,\mathfrak{u} \quad \text{u. s. w.},$$

so dass also, wenn μ eine beliebige Constante ist,

$$u - \lambda\mathfrak{p} = \mu\mathfrak{u}$$
$$v - \lambda\mathfrak{q} = \mu\mathfrak{v}$$
$$w - \lambda\mathfrak{r} = \mu\mathfrak{w} \quad \text{ist.}$$

Diese Gleichungen lassen sich in einen Minimalsatz zusammenfassen, indem man die Bewegungsmomente als unabhängige Variable behandelt und

$$o = \delta\left(L - \lambda J J_1 - \frac{\mu}{2} J^2\right) \quad \text{setzt.} \tag{27a}$$

Die Variation nach $\mathfrak{u}$ ergiebt, wenn man die Gleichungen 12) berücksichtigt

$$u - \lambda\mathfrak{p} - \mu\mathfrak{u} = 0.$$

Die Variation nach $\mathfrak{p}$ ergiebt

$$p - \lambda\mathfrak{u} = 0.$$

Bei der thatsächlich eintretenden stationären Bewegung ist also die lebendige Kraft kleiner als bei jeder anderen stationären Bewegung, die bei denselben Werthen von J und J_1 möglich ist.

Für nicht stationäre Bewegung ergiebt sich aus dem Hamilton-schen Princip ein Minimalsatz, aus dem die Integralgleichungen geschöpft werden können, wenn noch ein weiteres Integral bekannt ist.

Bezeichnen wir allgemein mit $p_\mathfrak{a}$ Coordinaten, mit $q_\mathfrak{a} = \frac{dp_\mathfrak{a}}{dt}$ Geschwindigkeiten, so sind die Bewegungsmomente $s_\mathfrak{a} = \frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{a}}$, wenn wir mit H die Differenz der potentiellen und kinetischen Energie bezeichnen. Sind $P_\mathfrak{a}$ die äusseren Kräfte des Systems, so lauten die Differentialgleichungen der Bewegungen

$$-P_\mathfrak{a} = \frac{\partial H}{\partial p_\mathfrak{a}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{a}}\right).$$

Multipliciren wir jede Gleichung mit $q_\mathfrak{a}$ und bilden die Summe über alle $\mathfrak{a}$, so wird

$$\sum_\alpha P_\alpha q_\alpha = -\sum_\alpha \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} q_\alpha + \frac{d}{dt}\left(\sum q_\alpha \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right) - \sum \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\frac{dq_\alpha}{dt}$$

$$= -\frac{d}{dt}\left(H - \sum_\alpha q_\alpha \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right), \quad \text{weil } \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{dp_\alpha}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\frac{dq_\alpha}{dt} \quad \text{ist.}$$

Nun stellt $-\sum_\alpha P_\alpha \frac{dp_\alpha}{dt} dt$ die Arbeitsleistung der Kräfte P_α während dt dar, um welche die Energie des Systems zunimmt, also ist die Energie

$$E = H - \sum_\alpha q_\alpha \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}.$$

Setzen wir die äusseren Kräfte gleich Null, so wird die Bewegungsgleichung durch Variation des Integrals

$$\Phi = \int_{t_0}^{t_1} H dt$$

gewonnen.

Schreiben wir

$$\Phi_1 = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ H - \sum_\alpha \left(q_\alpha - \frac{dp_\alpha}{dt}\right) \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right\}$$

und verlangen, dass $\delta\Phi_1 = 0$ werde und dass für $t = t_0$ und $= t_1$ die δp verschwinden, betrachten ferner p_α und q_α als unabhängige Variable, so ergiebt die Variation nach dem Parameter p_α

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \frac{d\delta p_\alpha}{dt}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right) = 0\,;$$

intregirt man das zweite Glied partiell und berücksichtigt, dass für $t = t_0$ und $= t_1$, die $\delta p = 0$ sind, und dass $q_\alpha = \frac{dp_\alpha}{dt}$ ist, so wird

$$\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{dH}{dq_\alpha}\right) = 0,$$

es ergiebt sich also dasselbe Resultat, wie aus der Hamilton'schen Form. Variirt man nach q_α, so erhält man

$$0 = -\int_{t_0}^{t_1} dt \left(q_\mathfrak{a} - \frac{dp_\mathfrak{a}}{dt}\right) \frac{\partial^2 H}{\partial q_\mathfrak{a}^2}$$

und damit $q_\mathfrak{a} = \frac{dp_\mathfrak{a}}{dt}$.

Aus dieser Form erhält man also sämmtliche Gleichungen des Problems. Wir können Φ_1 die Gestalt geben:

$$\Phi_1 = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ E - \sum_\mathfrak{a} \frac{dp_\mathfrak{a}}{dt} \frac{dH}{\partial q_\mathfrak{a}} \right\}.$$

Wenden wir diese Gleichung auf unseren Fall an, so haben wir $E = L$, die resultirenden Bewegungsmomente sind J und J_1 und wir nennen die Coordinaten, in deren Richtung sie wirken, $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$. Dann ist

$$\Phi_1 = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ L - \frac{d\mathfrak{S}}{dt} J - \frac{d\mathfrak{S}_1}{dt} J_1 \right\} \tag{28}$$

die Function, deren erste Variation bei der thatsächlichen Bewegung verschwindet.

Wir wollen uns im Folgenden auf die Betrachtung der einfachsten Beispiele, bei denen sich die mathematischen Ergebnisse noch verhältnissmässig einfach übersehen lassen, beschränken.

Die Componenten der Geschwindigkeit nach den Axen x, y, z bei der gerade vorhandenen Lage des Coordinatensystems sind bekanntlich

$$\begin{aligned} &u + zq - yr \\ &v + xr - zp \\ &w + yp - xq\,. \end{aligned} \tag{29}$$

Es ist also, wenn dm ein Massenelement des Körpers bezeichnet,

$$2L = \int dm \left[(u + zq - yr)^2 + (v + xr - zp)^2 + (w + yp - xq)^2\right]$$

$$= \int dm\,(u^2 + v^2 + w^2) + 2\,(vr - wq) \int dmx + 2\,(wp - ur) \int dmy$$

$$+ 2(uq - vp) \int dmz + p^2 \int dm(y^2 + z^2) + q^2 \int dm(z^2 + x^2) + r^2 \int dm\,(x^2 + y^2)$$

$$-2qr\int dm\, yz - 2rp\int dm\, zx - 2pq\int dm\, xy. \qquad 30)$$

Wenn nun die Massenvertheilung des Körpers symmetrisch zur xy-Ebene ist, so entspricht jedem Massenelement in der Entfernung z ein gleiches in der Entfernung $-z$. Es fallen also die Glieder fort, die unter dem Integralzeichen z enthalten, also die Glieder

$$uq - vp, \quad qr, \quad rp.$$

Findet noch ausserdem Symmetrie zur xz-Ebene statt, so verschwinden die Glieder

$$wp - ur, \quad qr, \quad pq.$$

Es ist dann die lebendige Kraft des festen Körpers

$$2L = a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + a_{44}p^2 + a_{55}q^2 + a_{66}r^2 + 2a_{35}wq + 2a_{26}vr. \qquad 31)$$

Wir setzen das Geschwindigkeitspotential der Flüssigkeit

$$\varphi = u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + p\varphi_4 + q\varphi_5 + r\varphi_6,$$

dann sind an der Oberfläche des Körpers nach 29) $\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \cos nx$ u. s. w., $\frac{\partial\varphi_4}{\partial n} = y\cos nz - z\cos ny$ u. s. w., und in Folge der Gleichung 4) Abschnitt III

$$a_{11} = s\int dS\varphi_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}, \qquad a_{12} = s\int dS\varphi_1 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}.$$

An den Punkt z und $-z$ haben dann bei der Symmetrie um die xy-Ebene $\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial n}, \frac{\partial\varphi_5}{\partial n}$ gleiche und $\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}, \frac{\partial\varphi_4}{\partial n}, \frac{\partial\varphi_6}{\partial n}$ entgegengesetzte Werthe. Daraus folgt dieselbe Eigenschaft für die φ. Man sieht daraus, dass dieselben a verschwinden, wie bei der lebendigen Kraft des festen Körpers. Jedes φ genügt der Gleichung $\Delta\varphi = 0$.

Ist der Körper ein Rotationskörper, so muss die lebendige Kraft ungeändert bleiben, wenn wir für v schreiben $-w$, für q schreiben $-r$ und v für w, q für r. Dies ist gleichbedeutend mit einer Drehung des Coordinatensystems um einen rechten Winkel um die x-Axe. Also ist die gesammte lebendige Kraft:

$$2L = a_{11}u^2 + a_{22}(v^2 + w^2) + a_{44}p^2 + a_{55}(q^2 + r^2). \qquad 32)$$

In diesem Falle ist die Integration von Kirchhoff vollständig durchgeführt worden.

Wir beschränken uns hier zunächst auf den Fall, wo $p = q = w = 0$ sind; die Gleichungen 2) geben dann

$$a_{11}\frac{du}{dt} = r a_{22} v, \qquad a_{22}\frac{dv}{dt} = -r a_{11} u,$$
$$a_{55}\frac{dr}{dt} = (a_{11} - a_{22}) u v.$$

Da hier nur Drehung um die z-Axe stattfindet und $w = 0$ ist, so bleibt die xy-Ebene im Raume an derselben Stelle.

Setzen wir

$$u = \mathfrak{A} \sin am\, \varepsilon t, \quad v = \mathfrak{B} \Delta am\, \varepsilon t, \quad r = \mathfrak{C} \cos am\, \varepsilon t, \tag{33}$$

so ergiebt sich durch Differenziren und Einsetzen in die obigen Gleichungen

$$\begin{gathered} a_{11}\varepsilon\mathfrak{A} = a_{22}\mathfrak{B}\mathfrak{C}, \qquad k^2 a_{22}\varepsilon\mathfrak{B} = a_{11}\mathfrak{A}\mathfrak{C}, \\ a_{55}\varepsilon\mathfrak{C} = (a_{22} - a_{11})\mathfrak{A}\mathfrak{B}. \end{gathered} \tag{34}$$

Hier bedeutet k den Modul der elliptischen Functionen. Von den fünf willkürlichen Constanten bleiben zwei unbestimmt.

Die Gleichungen werden auch erfüllt, wenn die drei elliptischen Functionen anders auf die Grössen u, v, r vertheilt werden. Bei vorgeschriebenen Werthen der Constanten a giebt es aber immer nur eine Vertheilung, bei der alle Grössen reell sind und $k < 1$).

Setzen wir nun

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos\vartheta, \quad \text{so ist } \alpha_2 = -\sin\vartheta \quad & \alpha_3 &= 0 \\ \beta_1 &= \sin\vartheta \qquad\qquad \beta_2 = \cos\vartheta & \beta_3 &= 0 \\ \gamma_1 &= \gamma_2 = \gamma_3 = 0. \end{aligned}$$

Legen wir die x-Axe in die Richtung des resultirenden Bewegungsmoments, so ist $B = 0$ und die Gleichungen 20) geben

$$\begin{aligned} a_{11} u \cos\vartheta - a_{22} v \sin\vartheta &= A \\ a_{11} u \sin\vartheta + a_{22} v \cos\vartheta &= 0. \end{aligned} \tag{35}$$

Hieraus folgt

$$A\cos\vartheta = a_{11} u, \qquad -A\sin\vartheta = a_{22} v, \qquad r = \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Ferner ist

$$x_1 = \alpha + x\cos\vartheta - y\sin\vartheta, \quad y_1 = \beta + x\sin\vartheta + y\cos\vartheta \tag{36}$$

und die Geschwindigkeit des Anfangspunktes der Coordinaten

$$\frac{d\alpha}{dt} = u \cos \vartheta - v \sin \vartheta, \quad \frac{d\beta}{dt} = u \sin \vartheta + v \cos \vartheta$$

oder

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{A}{a_{11}} \cos^2 \vartheta + \frac{A}{a_{22}} \sin^2 \vartheta, \quad \frac{d\beta}{dt} = \left(\frac{A}{a_{11}} - \frac{A}{a_{22}}\right) \sin \vartheta \cos \vartheta,$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \mathfrak{C} \cos am\, \varepsilon t.$$

Aus 33) und der letzten Gleichung ergiebt sich

$$\alpha = -\left(\frac{a_{11}\mathfrak{A}^2}{\varepsilon A k^2} - \frac{a_{22}\mathfrak{B}^2}{A\varepsilon}\right)\left[\frac{\varepsilon E t}{K} + \frac{\Theta'(\varepsilon t)}{\Theta(\varepsilon t)}\right] + \frac{a_{11}\mathfrak{A}^2}{A k^2} t + \text{const}. \quad 37)$$

Hier bedeuten E und K die vollständigen elliptischen Integrale zweiter und erster Gattung und Θ die von Jacobi definirte Reihe

$$\Theta(u) = 1 - 2q \cos \frac{\pi u}{K} + 2q^4 \cos \frac{2\pi u}{K} - 2q^9 \cos \frac{3\pi u}{K} + \cdots;$$

ferner ist

$$\Theta'(u) = \frac{d\Theta}{du}, \qquad q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}, \qquad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - (1 - k^2)\sin\varphi}}.$$

Für die Constanten ergeben sich folgende Gleichungen nach 34)

$$k^2 = \frac{a_{11}{}^2 \mathfrak{A}^2}{a_{22}{}^2 \mathfrak{B}^2}, \qquad \varepsilon = \frac{a_{22}\mathfrak{B}}{a_{11}\mathfrak{A}} \mathfrak{C}, \qquad \mathfrak{C}^2 a_{22} a_{55} = a_{11}(a_{12} - a_{11})\mathfrak{A}^2.$$

Setzt man $t = 0$, so ist nach 33) $v = \mathfrak{B}$, $u = 0$, nach 35) also $\cos \vartheta = 0$ und demnach $\sin \vartheta = -1$

$$A = + a_{22}\mathfrak{B}.$$

Endlich ergiebt sich

$$\beta = \frac{1}{\varepsilon A}(a_{22} - a_{11})\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cos am\, \varepsilon t, \qquad 38)$$

$$\vartheta = -\arcsin \Delta am\, \varepsilon t.$$

Wir können auch schreiben

$$k^2 = \frac{a_{11} a_{55} \mathfrak{C}^2}{a_{22}(a_{22} - a_{11})\mathfrak{B}^2}.$$

Da k positiv und reell und kleiner als Eins sein muss, so folgt hieraus, dass $a_{22} > a_{11}$ und $a_{22}(a_{22} - a_{11})\mathfrak{B}^2 < a_{11} a_{55} \mathfrak{C}^2$ sein muss.

Die Function $\Delta\, am\, \varepsilon t$ schwankt zwischen den Werthen $+1$ und $+\sqrt{1-k^2}$. Also schwankt ϑ zwischen den Werthen $-\frac{\pi}{2}$ und $-\arcsin\sqrt{1-k^2}$ hin und her. Je kleiner k ist, um so kleiner sind die drehenden Schwingungen, die der Körper bei seiner Fortbewegung ausführt. Nach 36) und 38) macht der Körper in derselben Periode hin- und hergehende Bewegungen in der Richtung der y'-Axe, dabei sind seine grössten Entfernungen von der x'-Axe nach beiden Seiten gleich gross.

Die Geschwindigkeit des Körpers in der Richtung x' setzt sich nach 37) zusammen aus einer constanten Geschwindigkeit und einer periodischen, die in derselben Periode wie die andern die Geschwindigkeit bald zu bald abnehmen lässt, wozu noch Schwingungen höherer Periode und kleiner werdender Amplitude entsprechend den Gliedern der Reihe $\Theta(\varepsilon t)$ hinzukommen.

Wir setzen zweitens

$$u = \mathfrak{A} \sin am\, \varepsilon t, \qquad v = \mathfrak{B} \cos am\, \varepsilon t, \qquad r = \mathfrak{C}\, \Delta\, am\, \varepsilon t = \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Dann ergiebt sich

$$a_{11}\, \varepsilon \mathfrak{A} = a_{22}\, \mathfrak{B}\mathfrak{C}, \qquad a_{22}\, \varepsilon \mathfrak{B} = a_{11}\, \mathfrak{A}\mathfrak{C},$$
$$a_{55}\, \varepsilon \mathfrak{C} k^2 = (a_{22} - a_{11})\, \mathfrak{A}\mathfrak{B}.$$

Hier findet sich für α

$$\alpha = -\left[\frac{(a_{11}\mathfrak{A}^2 - a_{22}\mathfrak{B}^2)(E-K)}{A k^2 . K} - \frac{a_{22}\mathfrak{B}^2}{A}\right] t - \frac{a_{11}\mathfrak{A}^2 - a_{22}\mathfrak{B}^2}{\varepsilon A k^2} \cdot \frac{\Theta'(\varepsilon t)}{\Theta(\varepsilon t)} + \text{const}, \tag{39}$$

ferner

$$a_{22}\mathfrak{B} = a_{11}\mathfrak{A}, \qquad \varepsilon = \mathfrak{C},$$
$$A = a_{22}\mathfrak{B}, \qquad k^2 = \frac{(a_{22} - a_{11})\, a_{22}\mathfrak{B}^2}{a_{55}\, a_{11}\, \mathfrak{C}^2}.$$

Hier muss $a_{22} > a_{11}$, $(a_{22} - a_{11})\, a_{22}\mathfrak{B}^2 < a_{55}\, a_{11}\, \mathfrak{C}^2$ sein.

Weiter ist

$$\beta = \frac{1}{\varepsilon A k^2}(a_{22} - a_{11})\, \mathfrak{A}\mathfrak{B}\, \Delta\, am\, \varepsilon t$$
$$= \frac{a_{55}}{a_{22}} \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}\, \Delta\, am\, \varepsilon t \tag{40}$$
$$\vartheta = -\left(\frac{\pi}{2} - am\, \varepsilon t\right).$$

Da $\frac{d\vartheta}{dt} = \mathfrak{C}\,\Delta\, am\, \varepsilon t$ stets positiv bleibt, so ändert die Drehungsgeschwindigkeit niemals ihre Richtung. Der Körper macht also vollständige Umdrehungen in derselben Drehungsrichtung. Thatsächlich wird auch der Drehungswinkel ϑ mit unendlich wachsender Zeit unendlich gross.

Wirken auf den Körper Kräfte, so lassen sich die Differentialgleichungen nur in den einfachsten Fällen integriren. Wirken dieselben Kräfte auf Körper und Flüssigkeit, so ist zu bemerken, dass in dem einfach zusammenhängenden Raum keine Bewegungen der Flüssigkeit unter dem Einfluss conservativer Kräfte eintreten können, wenn der Raum, den der Körper einnimmt, von Flüssigkeit erfüllt wäre. Die Kräfte, die auf die äussere Flüssigkeit wirken und diejenigen, die auf die Flüssigkeit wirken, die die Stelle des Körpers einnimmt, halten sich also im Gleichgewicht. Daher werden die Gesammtkräfte, die auf das ganze System wirken, sich zusammensetzen aus den Kräften, die auf den Körper wirken und den negativ genommenen Kräften, die auf die vom Körper verdrängte Flüssigkeit wirken würden. Deshalb fällt z. B. der Einfluss der Schwere fort, wenn der Körper dieselbe Dichtigkeit wie die Flüssigkeit besitzt.

Nehmen wir an, dass nur in der Richtung x eine constante Kraft wirkt, so ergiebt die erste der Gleichungen 2), wenn wir voraussetzen, dass keine Drehung und keine Bewegung senkrecht zur Kraftwirkung vorhanden ist,

$$p = 0 \qquad q = 0 \qquad r = 0 \qquad v = 0 \qquad w = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u} = X \tag{41)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = Xt + \text{const}.$$

Da in diesem Falle $2L = a_{11} u^2$ ist, so haben wir

$$a_{11} u = Xt + \text{const}.$$

Die Constante a_{11} hängt von der Form des Körpers ab. Würde keine Kraft wirken, so würde der Körper mit constanter Geschwindigkeit durch die Flüssigkeit fortschreiten. Ist die äussere Kraft von bestimmt vorgeschriebener Grösse, so hängt die Grösse $\frac{du}{dt}$, die Beschleunigung des Körpers, von der Constanten a_{11}, also von seiner Gestalt ab. Es wird von Interesse sein, diesen Ein-

fluss der Flüssigkeit auf die Bewegung des Körpers in der Abhängigkeit von der Form seiner Oberfläche in einigen einfachen Fällen zu untersuchen.

Die lebendige Kraft des Körpers selbst ist $\frac{m}{2}u^2$, wenn m seine Masse ist.

Die lebendige Kraft der Flüssigkeit ist nach Gleichung 4) Abschnitt III

$$\frac{s}{2}\int dS\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}.$$

An der Oberfläche ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = u\cos nx\,.$$

Wir betrachten jetzt ein Umdrehungsellipsoid, dessen Umdrehungsaxe a, dessen zweite Axe c sein möge; a soll der x-Axe parallel sein. Nach 20) und 21) Abschnitt III ist dann an der Oberfläche

$$\varphi = u\varphi_1\,,\qquad \varphi_1 = -\frac{Ax}{2-A}$$

$$A = ac^2\int_0^\infty\frac{d\varepsilon_1}{(a^2+\varepsilon_1)(c^2+\varepsilon_1)\sqrt{a^2+\varepsilon_1}} = \frac{2ac^2}{c^2-a^2}\left\{\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{c^2-a^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a}\right\}$$

für $c > a$

$$= -\frac{2ac^2}{a^2-c^2}\left\{\frac{1}{a}+\frac{1}{2\sqrt{a^2-c^2}}\log\frac{a-\sqrt{a^2-c^2}}{a+\sqrt{a^2-c^2}}\right\} \qquad 42)$$

für $c < a$.

Ist nun die Gleichung der Ellipse, wenn wir $\varrho^2 = x^2 + y^2$ setzen

$$\varrho = \frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,,$$

so ist

$$-\int dS x\cos nx = 2\pi\int_{-a}^{a}\varrho x^2\frac{c\,dx}{a\sqrt{a^2-x^2}} = 2\pi\frac{c^2}{a^2}\int_{-a}^{a}x^2dx = \frac{4\pi}{3}c^2a\,.$$

Daher

$$2L = mu^2 + \frac{4\pi s}{3}c^2a\frac{A}{2-A}u^2\,,\qquad a_{11} = m + \frac{4\pi s}{3}c^2a\frac{A}{2-A}. \qquad 43)$$

Lassen wir c unendlich gross werden, während das mit c^2a proportionale Volumen ungeändert bleibt, so wird

$$A = 2\,,$$

also a_{11} unendlich. In diesem Falle ist a unendlich klein; wir haben es also mit einer unendlich dünnen Scheibe zu thun, die in der Richtung ihrer Normale fortschreitet. Um hier endliche Beschleunigungen zu ertheilen, muss die Kraft X nach 41) unendlich gross sein. Denken wir uns a unendlich klein, dagegen c endlich, so ist in erster Näherung $2 - A = \pi \frac{a}{c}$, also $a_{11} = \frac{8}{3} s c^3$, die beschleunigende Kraft muss der dritten Potenz des Radius proportional wachsen, wenn die Scheibe dieselbe Beschleunigung erhalten soll. Man erhält hierdurch auch ein Maass für den Widerstand, den eine Flüssigkeit der Bewegung eines festen Körpers entgegensetzt, der aber eine ganz andere Bedeutung hat, wie der Widerstand durch Bildung von Unstetigkeitsflächen (s. Seite 110).

Setzen wir dagegen in der zweiten Gleichung a unendlich gross, so ist

$$A = 0, \qquad a_{11} = m. \tag{44}$$

Hier ist c unendlich klein und demnach haben wir hier einen sehr langen dünnen Stab, der in der Richtung seiner Axe fortschreitet. Hier ist die Beschleunigung dieselbe, als ob die Flüssigkeit nicht vorhanden wäre.

Denken wir uns jetzt die Beschleunigung anstatt in der Richtung x in der Richtung y wirken. Dann haben wir anstatt a_{11} die Constante a_{22}, anstatt u die Geschwindigkeit v einzuführen.

Ferner ist

$$\varphi = v\varphi_2\,, \qquad \varphi_2 = -\frac{By}{2-B}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = v \cos ny\,,$$

$$B = c^2 a \int_0^\infty \frac{d\varepsilon_1}{(c^2+\varepsilon_1)^2 \sqrt{a^2+\varepsilon_1}} = -\frac{c^2 a}{c^2-a^2}\left\{\frac{a}{c^2} - \frac{1}{\sqrt{c^2-a^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a}\right\}$$

$$c > a$$

$$= \frac{c^2 a}{a^2-c^2}\left\{\frac{a}{c^2} + \frac{1}{2\sqrt{a^2-c^2}} \log \frac{a-\sqrt{a^2-c^2}}{a+\sqrt{a^2-c^2}}\right\} \tag{45}$$

$$a > c.$$

Da nun

$$-\int d\,S y \cos ny = \iint dz\,dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,.\; y \cos ny$$

$$= \frac{a}{c} \iint \frac{dz\,dy\,y^2}{\sqrt{c^2-(y^2+z^2)}} \text{ oder,}$$

wenn $x = \varrho \cos \vartheta$, $y = \varrho \sin \vartheta$ gesetzt wird,

$$= \frac{2a}{c} \int_0^{2\pi} \int_0^c \frac{\varrho^3 \sin^2 \vartheta d\vartheta d\varrho}{\sqrt{c^2 - \varrho^2}} = \frac{4\pi}{3} a c^2 \text{ ist,}$$

so folgt

$$\left.\begin{aligned} 2L &= mv^2 + \frac{4\pi s}{3} a c^2 \frac{Bv^2}{2 - B} \\ a_{22} &= m + \frac{4\pi s}{3} a c^2 \frac{B}{2 - B}. \end{aligned}\right\} \qquad 46)$$

Setzen wir hier $c = \infty$, so wird $B = 0$ und $a_{22} = m$. Wenn die flache Scheibe in der Richtung ihres Radius bewegt wird, ist die Beschleunigung dieselbe, als ob keine Flüssigkeit vorhanden wäre.

Setzen wir $a = \infty$, so wird

$$B = 1, \qquad a_{22} = m + \frac{4\pi s a c^2}{3}.$$

Die Beschleunigung, die ein dünner Stab von einer constanten äusseren Kraft erfährt, wenn er senkrecht zu seiner Axe durch die Flüssigkeit bewegt wird, ist proportional seinem Volumen und von den Dimensionen unabhängig, solange das Volumen constant gehalten wird; sie ist dieselbe, als wenn der Körper sich im leeren Raum bewegte und seine Dichtigkeit um die Dichtigkeit s der Flüssigkeit vermehrt wäre.

Setzen wir $c^2 a = n$ und differenziren die Gleichungen nach a unter der Bedingung, dass n constant bleibe, so erhalten wir

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{9 - \frac{3}{2} \log \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - \frac{n}{a}}}{a - \sqrt{a^2 - \frac{n}{a}}} \right) \cdot \frac{\left(2a + \frac{n}{a^2}\right)}{\sqrt{a^2 - \frac{n}{a}}}}{\left(a^2 - \frac{n}{a}\right)^2} \cdot n \qquad a > c$$

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{9 - \frac{3\left(2a + \frac{n}{a^2}\right)}{\sqrt{\frac{n}{a} - a^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\frac{n}{a} - a^2}}{a}}{\left(\frac{n}{a} - a^2\right)^2} \cdot n \qquad c > a \qquad 47)$$

$$\frac{\partial B}{\partial a} = -\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial a}.$$

Nun ist

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial a} = \frac{8\pi n}{3}\frac{\partial A}{\partial a}\frac{1}{(2-A)^2}, \qquad \frac{\partial a_{22}}{\partial a} = \frac{8\pi n}{3}\frac{\partial B}{\partial a}\frac{1}{(2-B)^2}.$$

Es verschwindet also $\frac{\partial a_{11}}{\partial a}$ und $\frac{\partial a_{22}}{\partial a}$ gleichzeitig mit $\frac{\partial A}{\partial a}$; $\frac{\partial A}{\partial a}$ ist negativ unendlich, wenn $n = a^3$, $a = c$ wird, das Ellipsoid also in eine Kugel übergeht und zwar ist dann

$$(c^2 - a^2)\frac{\partial A}{\partial a} = -3a.$$

Hier ändern sich also die Werthe von A und B schnell. Der Werth des Widerstandes gegen die Beschleunigung ändert sich also schnell, wenn die Form des Ellipsoids sich der Kugel nähert, und langsam in der Nähe des Werthes $\frac{\partial A}{\partial a} = 0$.

Die Bewegung zweier Kugeln in einer Flüssigkeit, deren Radien klein im Vergleich zum Abstand sind, lässt sich durch successive Annäherung bestimmen.

Das Geschwindigkeitspotential φ setzen wir zunächst aus zwei Theilen zusammen, von denen jeder die Bewegung der Flüssigkeit bestimmt, wenn nur die eine der beiden Kugeln vorhanden wäre.

Dann ist

$$\varphi_1 = \varphi_1' + \varphi_1''$$

die erste Näherung.

Die zweite Annäherung erhalten wir, wenn wir

$$\varphi_2 = \varphi_2' + \varphi_2''$$

setzen und vorschreiben, dass an der ersten Kugelfläche

$$\frac{\partial \varphi_2'}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_1''}{\partial n} = 0$$

und an der zweiten

$$\frac{\partial \varphi_2''}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_1'}{\partial n} = 0.$$

Die dritte Annäherung wird nach demselben Princip

$$\varphi_3 = \varphi_3' + \varphi_3'',$$

wo an der ersten Kugelfläche

$$\frac{\partial \varphi_3'}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_2''}{\partial n} = 0$$

und an der zweiten

$$\frac{\partial \varphi_3''}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_2'}{\partial n} = 0$$

zu setzen ist.

Durch einen solchen unendlichen Process, dessen Convergenz daraus folgt, dass bei grösser werdender Entfernung der Kugeln die gegenseitige Beeinflussung immer kleiner wird, erreicht man, dass an beiden Kugeln

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{ist.}$$

Die Coordinaten des Mittelpunktes der einen Kugel seien x', y', z', die des andern x'', y'', z''. Ferner sei

$$r'^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$
$$r''^2 = (x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z'')^2.$$

Dann ist nach 28) Abschnitt III

$$\begin{aligned} \varphi'_1 &= + \frac{R'^3}{2}\left(u' \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial x} + v' \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial y} + w' \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial z}\right) \\ &= - \frac{R'^3}{2}\left\{u' \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial x'} + v' \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial y'} + w' \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial z'}\right\} \\ \varphi''_1 &= - \frac{R''^3}{2}\left\{u'' \frac{\partial \frac{1}{r''}}{\partial x''} + v'' \frac{\partial \frac{1}{r''}}{\partial y''} + w'' \frac{\partial \frac{1}{r''}}{\partial z''}\right\}. \end{aligned} \tag{48}$$

Hier sind u', v', w'; u'', v'', w'' die Componenten der Geschwindigkeiten beider Kugeln; R' und R'' ihre Halbmesser.

Ferner ist

$$\frac{\partial \varphi_1''}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_1''}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial \varphi_1''}{\partial y}\cos ny + \frac{\partial \varphi_1''}{\partial z}\cos nz$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_2'}{\partial n} = - \frac{\partial \varphi_1''}{\partial n} = &- \frac{R''^3}{2}\left\{u'' \frac{\partial^2 \frac{1}{r''}}{\partial x^2} + v'' \frac{\partial^2 \frac{1}{r''}}{\partial x \partial y} + w'' \frac{\partial^2 \frac{1}{r''}}{\partial x \partial z}\right\}\cos nx \\ &- \frac{R''^3}{2}\left\{u'' \frac{\partial^2 \frac{1}{r''}}{\partial y \partial x} + v'' \frac{\partial^2 \frac{1}{r''}}{\partial y^2} + w'' \frac{\partial^2 \frac{1}{r''}}{\partial y \partial z}\right\}\cos ny \\ &- \frac{R''^3}{2}\left\{u'' \frac{\partial^2 \frac{1}{r''}}{\partial z \partial x} + v'' \frac{\partial^2 \frac{1}{r''}}{\partial z \partial y} + w'' \frac{\partial^2 \frac{1}{r''}}{\partial z^2}\right\}\cos nz. \end{aligned} \tag{49}$$

Wir können dann φ'_2 nach Analogie von 48) bilden und erhalten

$$\varphi'_2 = -\frac{R'^3 R''^3}{4}\Bigg[\left\{u''\frac{\partial^2\frac{1}{r''}}{\partial x^2} + v''\frac{\partial^2\frac{1}{r''}}{\partial y\partial x} + w''\frac{\partial^2\frac{1}{r''}}{\partial x\partial z}\right\}\frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial x}$$

$$+\left\{u''\frac{\partial^2\frac{1}{r''}}{\partial y\partial x} + v''\frac{\partial^2\frac{1}{r''}}{\partial y^2} + w''\frac{\partial^2\frac{1}{r''}}{\partial y\partial z}\right\}\frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial y} \tag{50}$$

$$+\left\{u''\frac{\partial^2\frac{1}{r''}}{\partial z\partial x} + v''\frac{\partial^2\frac{1}{r''}}{\partial z\partial y} + w''\frac{\partial^2\frac{1}{r''}}{\partial z^2}\right\}\frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial z}\Bigg].$$

Der Werth von φ''_2 wird erhalten, wenn die Grössen, welche einmal gestrichelt sind, mit denen vertauscht werden, die zweimal gestrichelt sind und umgekehrt.

Die lebendige Kraft der Flüssigkeit ergiebt sich durch folgende Betrachtung. Wenn jede Kugel nur allein da wäre, so würde die lebendige Kraft im Zeitelement dt durch Beschleunigung jeder Kugel vermehrt um die geleistete Arbeit, nämlich nach 17) Abschnitt III $\frac{2}{3}\pi s R^3 \frac{dc}{dt} c dt$, wenn c die resultirende Geschwindigkeit ist, also ist die lebendige Kraft für die Geschwindigkeit c

$$\frac{2}{3}\pi s\, R^3\int_0^c c\frac{dc}{dt}\,dt = \frac{1}{3}\pi s\, R^3 c^2 = \frac{1}{3}\pi s\, R^3(u'^2 + v'^2 + w'^2)$$

und ebenso für die zweite Kugel.

Die zweite Näherung, in welcher die gegenseitige Einwirkung der Kugeln vorkommt, erhält man am einfachsten aus dem Werth der lebendigen Kraft

$$\frac{s}{2}\int dS\,\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}.$$

Nun ist an der Oberfläche jeder Kugel

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = u\cos nx + v\cos ny + w\cos nz\,.$$

Die partiellen Ableitungen nach x, y, z können durch die negativ genommenen nach x', y', z' beziehentlich x'', y'', z'' ersetzt werden.

Wenn der Abstand der Kugeln gross ist im Vergleich zu ihren Radien, so kann man den Abstand der beiden Mittelpunkte

$$a = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2}$$

einführen.

Nun ist an der Oberfläche

$$x - x' = - R' \cos nx, \quad y - y' = - R' \cos ny, \quad z - z' = - R' \cos nz.$$

Entwickeln wir $\frac{1}{r''}$ nach dem Taylor'schen Satz, so haben wir

$$\begin{aligned} \varphi_1'' = {} & \frac{R''^3}{2}\left(u'' \frac{\partial \frac{1}{a}}{\partial x'} + v'' \frac{\partial \frac{1}{a}}{\partial y'} + w'' \frac{\partial \frac{1}{a}}{\partial z'}\right) \\ & - \frac{R'R''^3}{2}\left(u'' \frac{\partial^2 \frac{1}{a}}{\partial x'^2} + v'' \frac{\partial^2 \frac{1}{a}}{\partial x' \partial y'} + w'' \frac{\partial^2 \frac{1}{a}}{\partial x' \partial z'}\right) \cos nx \\ & - \frac{R'R''^3}{2}\left(u'' \frac{\partial^2 \frac{1}{a}}{\partial y' \partial x'} + v'' \frac{\partial^2 \frac{1}{a}}{\partial y'^2} + w'' \frac{\partial^2 \frac{1}{a}}{\partial y' \partial z'}\right) \cos ny \\ & - \frac{R'R''^3}{2}\left(u'' \frac{\partial^2 \frac{1}{a}}{\partial z' \partial x'} + v'' \frac{\partial^2 \frac{1}{a}}{\partial z' \partial y'} + w'' \frac{\partial^2 \frac{1}{a}}{\partial z'^2}\right) \cos nz. \end{aligned} \tag{51}$$

Aus den Relationen

$$\frac{\partial \frac{1}{r''}}{\partial x''} = \frac{x - x''}{r''^3}, \quad \frac{\partial \frac{1}{r''}}{\partial y''} = \frac{y - y''}{r''^3}, \quad \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial z''} = \frac{z - z''}{r''^3} \quad \text{u. s. w.}$$

folgt leicht, dass unter der Voraussetzung, dass die Radien der Kugeln klein gegen den Abstand sind, an der Oberfläche der ersten Kugel φ_1'' klein gegen φ_1', und φ_2'' klein gegen φ_2', dagegen φ_1'' und φ_2' von derselben Grössenordnung sind. Berücksichtigen wir nur Glieder erster und zweiter Ordnung, wodurch die gegenseitige Beeinflussung der Kugeln in erster Näherung berücksichtigt wird, so haben wir für die Oberfläche der ersten Kugel

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_1' + \varphi_1'' + \varphi_2' = {} & \frac{R'}{2}(u' \cos nx + v' \cos ny + w' \cos nz) \\ & + \frac{R'^3}{2}\left(u'' \frac{\partial \frac{1}{a}}{\partial x'} + v'' \frac{\partial \frac{1}{a}}{\partial y'} + w'' \frac{\partial \frac{1}{a}}{\partial z'}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{3R'R''^3}{4}\left(u''\frac{\partial^2\frac{1}{a}}{\partial x'^2}+v''\frac{\partial^2\frac{1}{a}}{\partial x'\partial y'}+w''\frac{\partial^2\frac{1}{a}}{\partial x'\partial z'}\right)\cos nx\\
&-\frac{3R'R''^3}{4}\left(u''\frac{\partial^2\frac{1}{a}}{\partial y'\partial x'}+v''\frac{\partial^2\frac{1}{a}}{\partial y'^2}+w''\frac{\partial^2\frac{1}{a}}{\partial y'\partial z'}\right)\cos ny\\
&-\frac{3R'R''^3}{4}\left(u''\frac{\partial^2\frac{1}{a}}{\partial z'\partial x'}+v''\frac{\partial^2\frac{1}{a}}{\partial z'\partial y'}+w''\frac{\partial^2\frac{1}{a}}{\partial z'^2}\right)\cos nz\,.
\end{aligned}
\tag{52}
$$

Bildet man nun das Integral

$$\frac{s}{2}\int\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS$$

über beide Kugelflächen und führt Polarcoordinaten ein, so sieht man, dass nur die Glieder nicht verschwinden, die die Quadrate der Richtungscosinus enthalten, und es ergiebt sich für die lebendige Kraft der Flüssigkeit

$$
\begin{aligned}
L = s\pi\Bigg\{&\frac{R'^3}{3}(u'^2+v'^2+w'^2)+\frac{R''^3}{3}(u''^2+v''^2+w''^2)\\
&-R'^3R''^3\Bigg[u'u''\frac{\partial^2\frac{1}{a}}{\partial x'^2}+(v'w''+v''w')\frac{\partial^2\frac{1}{a}}{\partial y'\partial z'}\\
&+v'v''\frac{\partial^2\frac{1}{a}}{\partial y'^2}+(w'u''+w''u')\frac{\partial^2\frac{1}{a}}{\partial z\,\partial x'}\\
&+w'w''\frac{\partial^2\frac{1}{a}}{\partial z'^2}+(u'v''+u''v')\frac{\partial^2\frac{1}{a}}{\partial x'\partial y'}\Bigg]\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{53}
$$

Der Ausdruck vereinfacht sich wesentlich, wenn die Kugeln nur in der Richtung ihrer Verbindungslinien sich bewegen. Ist diese Richtung die x-Axe, so sind nur u' und u'' von Null verschieden. Dann ist

$$L = s\pi\left\{\frac{R'^3}{3}u'^2+\frac{R''^3}{3}u''^2-2u'u''\frac{R'^3R''^3}{a^3}\right\}. \tag{54}$$

Bewegen sich beide Kugeln in derselben Richtung senkrecht zur Verbindungslinie, so ist

$$L = s\pi\left\{\frac{R'^3u'^2}{3}+\frac{R''^3u''^2}{3}+u'u''\frac{R'^3R''^3}{a^3}\right\}. \tag{55}$$

Um die Bewegungsgleichungen der Kugeln zu finden, haben wir zu setzen

$$\frac{dx'}{dt} = u', \quad \frac{dy'}{dt} = v', \quad \frac{dz'}{dt} = w',$$
$$\frac{dx''}{dt} = u'', \quad \frac{dy''}{dt} = v'', \quad \frac{dz''}{dt} = w''.$$

Ist L die gesammte lebendige Kraft, so sind

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u'}\right) &= \frac{\partial L}{\partial x'} + X', & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u''}\right) &= \frac{\partial L}{\partial x''} + X'' \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v'}\right) &= \frac{\partial L}{\partial y'} + Y', & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v''}\right) &= \frac{\partial L}{\partial y''} + Y'' \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial w'}\right) &= \frac{\partial L}{\partial z'} + Z', & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial w''}\right) &= \frac{\partial L}{\partial z''} + Z''
\end{aligned} \tag{56}$$

die Bewegungsgleichungen und X', Y', Z' u. s. w. die äusseren Kräfte, die diese Bewegung unterhalten. Wenn die Geschwindigkeiten constant sind, so haben wir bei Bewegung der Kugeln parallel der Verbindungslinie

$$\begin{gathered}
\frac{\partial L}{\partial u'} = -2s\pi u'' \frac{R'^3 R''^3}{a^3} + \tfrac{2}{3} s\pi R'^3 u', \qquad a = x' - x'', \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u'}\right) = 6s\pi u'' \frac{R'^3 R''^3}{(x'-x'')^4} u' - \frac{6s\pi u''^2 R'^3 R''^3}{(x'-x'')^4}, \\
\frac{\partial L}{\partial x'} = 6s\pi u'' u' \frac{R'^3 R''^3}{(x'-x'')^4},
\end{gathered} \tag{57}$$

daher

$$X' = -6s\pi \frac{u''^2 R'^3 R''^3}{a^4}. \tag{58}$$

Da die Kraft X' verschwindet, wenn die erste Kugel allein vorhanden ist, so ist X' die Kraft, die auf die erste Kugel ausgeübt werden muss, um die constante Bewegung zu unterhalten, wenn die zweite Kugel sich bewegt. Es ist also $-X'$ die Kraft, die scheinbar von der zweiten Kugel ausgeübt wird.

Führen beide Kugeln in der Richtung ihrer Verbindungslinie kleine Schwingungen aus, so verschwindet der Mittelwerth von $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u'}\right)$ über eine ganze Schwingung genommen. Es ist also nach 57) X' gleich dem Mittelwerth von

$$-6\pi s \frac{R'^3 R''^3}{a^4} u' u''. \tag{59}$$

Bei der constanten Geschwindigkeit sind die scheinbaren Kräfte, die die beiden Kugeln auf einander ausüben, nur dann gleich und entgegengesetzt, wenn $u' = \pm u''$. Aus dem Vorzeichen für diese Kräfte folgt, dass die Kugeln sich scheinbar abstossen.

Bei der periodischen Bewegung sind die Kräfte immer gleich und entgegengesetzt. Solange u' und u'' gleiches Vorzeichen haben, stossen sich die Kugeln scheinbar ab, bei entgegengesetztem ziehen sie sich an.

Bewegen sich die Kugeln senkrecht zur Verbindungslinie, so ist nach 55) und 56)

$$X' = 3 s \pi u''^2 \frac{R'^3 R''^3}{a^4}, \tag{60}$$

die Kugeln ziehen sich also scheinbar an. Bei periodischer Bewegung ziehen sie sich an, so lange ihre Geschwindigkeiten gleich gerichtet sind und stossen sich ab, wenn sie entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Ist $R' = R''$, $u' = u''$, $v' = v''$, $w' = -w''$, so ist Symmetrie in Bezug auf die xy-Ebene vorhanden. Dann kann diese Ebene durch eine feste Wand ersetzt werden.

Wenn eine Kugel in der Nähe einer festen Wand parallel zu dieser fällt, so wird sie von der Wand mit einer Kraft

$$3 s \pi u^2 \frac{R^6}{a^4} \tag{61}$$

scheinbar angezogen. Hier bedeuten dann u die Geschwindigkeit der Kugel, R ihr Radius und a die doppelte Entfernung von der Wand.

§ 2.

Bewegung fester Körper in mehrfach zusammenhängenden Räumen, die mit incompressibler Flüssigkeit gefüllt sind.

Wenn die Körper in der Flüssigkeit mehrfach zusammenhängen, so sind auch die mit der incompressiblen Flüssigkeit erfüllten Räume mehrfach zusammenhängend. Die Bewegung der Flüssigkeit ist dann durch die Bewegung der festen Körper nicht vollständig bestimmt. Sie wird es erst, wenn man durch Querschnitte die Räume in einfach zusammenhängende verwandelt und

die Unstetigkeit vorschreibt, die das Geschwindigkeitspotential an den Querschnitten erfahren soll. Die Anwendung des Hamiltonschen Princips auf solche Bewegungen darf daher nicht nur die Bewegung der festen Körper berücksichtigen, sondern muss auch die von den festen Körpern unabhängige Bewegung der Flüssigkeit in die zu variirende Function aufnehmen. Wir bilden die Variation der Grösse

$$s\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = s\int_{t_0}^{t_1}\int\int\int dt\,dx\,dy\,dz\,\frac{u^2+v^2+w^2}{2}$$

mit der Vorschrift, dass die Anfangs- und Endlage der Körper zur Zeit $t = t_0$ und $t = t_1$, ebenso wie t_0 und t_1 selbst, constant gehalten werden. Wir erhalten dann bei der Variation

$$s\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = s\int_{t_0}^{t} dt\int\int\int dx\,dy\,dz\left(u\,\frac{d\delta x}{dt} + v\,\frac{d\delta y}{dt} + w\,\frac{d\delta z}{dt}\right).$$

Durch partielle Integration ergiebt sich

$$s\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = s\left[\int\int\int dx\,dy\,dz\,(u\delta x + v\delta y + w\delta z)\right]_{t_0}^{t_1}$$

$$- s\int_{t_0}^{t_1} dt\int\int\int dx\,dy\,dz\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right).$$

Wir haben nun, wenn p wieder den Druck bezeichnet

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = s\,\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad -\frac{\partial p}{\partial y} = s\,\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad -\frac{\partial p}{\partial z} = s\,\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Durch Einsetzen dieser Grössen lässt sich die partielle Integration der einzelnen Glieder nach x, y, z ausführen und wir erhalten

$$s\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = s\left[\int\int\int dx\,dy\,dz\,(u\delta x + v\delta x + w\delta x)\right]_{t_0}^{t_1}$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} dt\int dS\,p\,\delta l\,\cos nl.$$

n ist die nach aussen gerichtete Normale und δl die virtuelle Verschiebung der Flüssigkeitstheilchen an der Oberfläche. Die Integration ist über alle Grenzflächen der Flüssigkeit, also über die Oberflächen sämmtlicher Körper auszudehnen. Der Ausdruck

$$\int dS p \cos nx$$

ist der Druck, den die Flüssigkeit auf die festen Körper ausübt. Er ist gleich und entgegengesetzt dem Druck, den die festen Körper auf die Flüssigkeit ausüben. Aus diesem Gliede lassen sich also die Kräfte, welche die Körper ausüben, in der üblichen Weise herleiten. Man sieht aber, dass diese Kräfte im Allgemeinen nicht durch die Variation der lebendigen Kraft erhalten werden, solange das Glied

$$\left[\int\int\int dx\, dy\, dz\, (u\delta x + v\delta y + w\delta z)\right]_{t_0}^{t_1}$$

nicht verschwindet. Es gehen dann die Vortheile, die die Anwendung des Hamilton'schen Princips mit sich bringt, verloren. Wenn man nun auch die Vorschrift macht, dass die Anfangslage für die Körper sowohl wie für die Flüssigkeit nicht variirt wird, so zeigt das eben betrachtete Glied an, dass durch die weitere Vorschrift der Constanz der Endlage der festen Körper die Endlage der Flüssigkeitstheilchen im Allgemeinen variirt. Wenn kein Geschwindigkeitspotential vorhanden ist, so verschwindet das Glied niemals.

Ist ein Geschwindigkeitspotential vorhanden, so wird es

$$s\left[\int\int\int dx\; dy\; dz\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\delta z\right)\right]_{t_0}^{t_1}$$

$$= + s\left[\int dS\, \delta l \varphi \cos nl\right]_{t_0}^{t_1}.$$

Ist das Geschwindigkeitspotential mehrdeutig, so ist es an bestimmten Flächen (welche den Raum in einen einfach zusammenhängenden verwandeln) unstetig. Dann muss die Integration über die Körperoberflächen und diese Querschnitte ausgedehnt werden. Durch die Vorschrift, dass Anfangs- und Endlage nicht

variirt werden soll, kann die Variation der Endlage eines der Körperoberfläche anliegenden Flüssigkeitstheilchens nur tangential ausgeführt werden; daher ist $\cos nl = 0$. Es verschwindet also das Integral über die Oberflächen der Körper. Es verschwindet aber nicht an den Querschnitten und ein vollständiges Verschwinden des betrachteten Gliedes findet nur statt bei der Existenz eines eindeutigen Geschwindigkeitspotentials.

Wir wollen im Folgenden die Kräfte betrachten, die zwei unendlich dünne Ringe, die sich in einer Flüssigkeit befinden, vermöge der Druckkräfte der Flüssigkeit auf einander ausüben. Der Druck ist

$$p = C - s\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{s}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]. \qquad 62)$$

Diese wirksam werdenden Kräfte können durch die elektrodynamischen Kräfte ausgedrückt werden, welche in den Ringen fliessende elektrische Ströme auf einander ausüben würden. Das Geschwindigkeitspotential φ an einem Ort x, y, z ist durch dieselben Bedingungen bestimmt, wie das Potential von galvanischen Strömen, die mit der Stärke J in den Ringen fliessen, in Bezug auf einen Magnetpol von der Stärke Eins am Ort x, y, z. Nach der Ampère'schen Regel kann das Potential der Ströme ersetzt werden durch das einer magnetischen Doppelschicht, die an einer Fläche anliegt, welche von den Strömen begrenzt wird. Beim Hindurchgehen durch diese Schicht ändert das Potential sprungweise seinen Werth um $4\pi J$. Sonst ist es überall stetig und eindeutig und genügt die Gleichung $\Delta\varphi = 0$, an der Oberfläche der Bedingung $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$. Durch dieselben Bedingungen wird auch das Geschwindigkeitspotential bestimmt.

Bezeichnen wir mit dS ein Oberflächenelement der Ringe, mit $\cos nx$, $\cos ny$, $\cos nz$ die Richtungscosinus der nach aussen gerichteten Normale, mit u_1, v_1, w_1 die Geschwindigkeitscomponenten der Flüssigkeit an der Oberfläche und setzen

$$i_x = w_1 \cos ny - v_1 \cos nz, \qquad i_y = u_1 \cos nz - w_1 \cos nx, \qquad i_z = v_1 \cos nx - u_1 \cos ny. \qquad 63)$$

Diese i_x, i_y, i_z sehen wir als Componenten elektrischer Ströme an, die in der Oberfläche fliessen. Berechnen wir die elektrodynamische Kraft, die auf den im Flächenelement dS befindlichen

Strom von allen übrigen ausgeführt wird, so sind die Componenten dieser Kraft

$$X = dS\,(i_z V - i_y W)\,, \qquad Y = dS\,(i_x W - i_z U)\,, \qquad Z = dS\,(i_y U - i_x V)\,, \tag{64}$$

wo

$$\begin{aligned} U &= \int dS' \,\frac{i'_z\,(y-y') - i'_y\,(z-z')}{r^3} \\ V &= \int dS' \,\frac{i'_x\,(z-z') - i'_z\,(x-x')}{r^3} \\ W &= \int dS' \,\frac{i'_y\,(x-x') - i'_x\,(y-y')}{r^3} \end{aligned} \tag{65}$$

die Componenten der Kräfte auf einen Magnetpol von der Stärke Eins sind. Die Integrationen beziehen sich auf gestrichelte Grössen.

Setzen wir nun allgemein

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{4\pi}\int\!\!\int\!\!\int \frac{u'}{r}\,dx'\,dy'\,dz', \\ B &= -\frac{1}{4\pi}\int\!\!\int\!\!\int \frac{v'}{r}\,dx'\,dy'\,dz', \\ C &= -\frac{1}{4\pi}\int\!\!\int\!\!\int \frac{w'}{r}\,dx'\,dy'\,dz', \end{aligned} \tag{66}$$

so ist nach den Sätzen der Potentialtheorie in ganz analoger Weise, wie bei den Betrachtungen S. 58

$$u = \Delta A, \qquad v = \Delta B, \qquad w = \Delta C$$
$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0. \tag{67}$$

Setzen wir

$$L = \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y}, \qquad M = \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}, \qquad N = \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}, \tag{68}$$

so ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} &= \Delta A = u, \\ \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} &= \Delta B = v, \\ \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} &= \Delta C = w. \end{aligned} \tag{69}$$

Setzt man in die vorigen Gleichungen die Ausdrücke für A, B, C ein, berücksichtigt, dass $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}$, u. s. w. ist, so ergiebt sich durch partielle Integration, wenn überall $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ ist,

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{4\pi}\int \frac{dS'}{r}\,(w_1' \cos ny - v_1' \cos nz)\,,\\
M &= \frac{1}{4\pi}\int \frac{dS'}{r}\,(u_1' \cos nz - w_1' \cos nx)\,,\\
N &= \frac{1}{4\pi}\int \frac{dS'}{r}\,(v_1' \cos nx - u_1' \cos ny)\,.
\end{aligned}
\tag{70}
$$

Es ist also

$$
\begin{aligned}
u = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{dS'}{r^3}\,&[(y-y')\,(v_1' \cos nx - u_1' \cos ny)\\
&-(z-z')\,(u_1' \cos nz - v_1' \cos nx)]
\end{aligned}
$$

u. s. w.

Also ist

$$
-4\pi u = U, \qquad -4\pi v = V, \qquad -4\pi w = W. \tag{71}
$$

Fliessen die galvanischen Ströme in einer unendlich dünnen Schicht an der Oberfläche der Ringe, so ist an der äusseren Oberfläche

$$
\begin{aligned}
U &= -4\pi u_1\,,\\
V &= -4\pi v_1\,,\\
W &= -4\pi w_1\,,
\end{aligned}
\tag{72}
$$

und an der inneren nach bekannten elektrodynamischen Gesetzen $U = V = W = 0$. Suchen wir die elektrodynamischen Kräfte, die auf ein Element dS einwirken, so nehmen diese Kräfte von innen nach aussen von 0 bis zu den Werthen $-4\pi u_1$, $-4\pi v_1$, $-4\pi w_1$ zu. Um die Gesammtkraft zu finden, haben wir daher die Mittelwerthe $-2\pi u_1$, $-2\pi v_1$, $-2\pi w_1$ einzusetzen.

Wenn sich die Ringe bewegen, so sind für u_1, v_1, w_1 die relativen Geschwindigkeiten einzusetzen. Die Componenten der Geschwindigkeiten eines bestimmten Punktes der Ringoberfläche seien α, β, γ. Dann sind die Componenten der elektrodynamischen

Kraft, wenn wir $i_x = Jl$, $i_y = Jm$, $i_z = Jn$ setzen, (wo nun in den i in 64) auch die relativen Geschwindigkeiten einzusetzen sind; l, m, n sind die Richtungscosinus):

$$\begin{aligned} X &= 2\pi J dS\,[m(w_1 - \gamma) - n\,(v_1 - \beta)]\,, \\ Y &= 2\pi J dS\,[n\,(u_1 - \alpha) - l\,(w_1 - \gamma)]\,, \\ Z &= 2\pi J dS\,[l\,\,(v_1 - \beta) - m\,(u_1 - \alpha)]\,. \end{aligned} \tag{73}$$

Die Geschwindigkeit normal zur Oberfläche muss Null sein. Daher ist

$$(u_1 - \alpha)\cos nx + (v_1 - \beta)\cos ny + (w_1 - \gamma)\cos nz = 0\,. \tag{74}$$

Es ist daher, wenn man den Werth von J bildet,

$$J = \sqrt{(u_1 - \alpha)^2 + (v_1 - \beta)^2 + (w_1 - \gamma)^2}\,.$$

Setzen wir $X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2$, so wird nach 73) mit Berücksichtigung der Gleichung $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

$$\frac{R}{2\pi dS} = J\sqrt{(u_1-\alpha)^2+(v_1-\beta)^2+(w_1-\gamma)^2-[(u_1-\alpha)l+(v_1-\beta)m+(w_1-\gamma)n]^2}. \tag{75}$$

In den Gleichungen 63) haben wir auch anstatt u_1, v_1, w_1 zu setzen

$$u_1 - \alpha, \quad v_1 - \beta, \quad w_1 - \gamma;$$

multiplizieren wir die dann entstehenden Gleichungen mit $u_1 - \alpha$, $v_1 - \beta$, $w_1 - \gamma$ und addieren, so ergiebt sich

$$i_x\,(u_1 - \alpha) + i_y\,(v_1 - \beta) + i_z\,(w_1 - \gamma) = 0\,.$$

Die Strömung an der Oberfläche steht also nach 74) senkrecht auf der Normale und nach 76) senkrecht zu den fingirten elektrischen Strömen. Parallel den letzteren darf an der Oberfläche keine Strömung stattfinden, weil diese Stromlinien nicht durch den Querschnitt gehen würden, an dem die Potentialfunction unstetig ist.

Es ist also auch

$$(u_1 - \alpha)\,l + (v_1 - \beta)\,m + (w_1 - \gamma)\,n = 0\,. \tag{76}$$

Also bleibt

$$\begin{aligned} \frac{R}{2\pi dS} &= (u_1 - \alpha)^2 + (v_1 - \beta)^2 + (w_1 - \gamma)^2 \\ &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \beta\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \gamma\right)^2 \text{ und nach 62)} \\ &= \frac{2C}{s} - \frac{2p}{s} - 2\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\left(\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right). \end{aligned} \tag{77}$$

Also

$$pdS = -\frac{sR}{4\pi} + \left[C - s\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right] dS. \qquad 78)$$

Sind die Oberflächen der Ringe unendlich klein, die Ringe unendlich dünn, so sind die Geschwindigkeiten an ihnen sehr gross. Es ist daher R, welches die quadratischen Glieder der Geschwindigkeiten enthält, gross gegen die linearen. Die Grössen U, V, W sind die Componenten des Potentials der in den Oberflächen fingirten Ströme auf einen Magnetpol mit dem Magnetismus Eins. Das Potential jedes Ringes ändert bekanntlich seinen Werth um $-4\pi J$, wenn es den Ring einmal umkreist. Das Geschwindigkeitspotential ändert sich dabei ebenfalls um einen constanten Werth, der k sein möge. Nach den Gleichungen 71)

$$u = -4\pi U, \qquad v = -4\pi V, \qquad w = -4\pi W,$$

ist also $J = k$.

Wenn also die Ringe sich **nicht** bewegen, so ist nach 78) die Wirkung der Ringe auf einander gleich der mit $-\frac{s}{4\pi}$ multiplizierten elektrodynamischen Wirkung von Strömen, die mit der Intensität k (dem Sprung des Geschwindigkeitspotentials an jedem Querschnitt, der den Raum in einen einfach zusammenhängenden verwandelt) in jedem Ringe fliessen. Bewegen sich die Ringe, so hängt die Intensität der Ströme noch von den Geschwindigkeiten α, β, γ ab.

Die allgemeinen Bewegungsgleichungen eines Körpers, der sich in einer Flüssigkeit bewegt, sind von Thomson und Tait (Natural philosophy Art. 320 und Uebersetzung Bd. I S. 296) und Kirchhoff (Ueber die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit; Crelle Bd. 71 1869, Ges. Abh. S. 376) aus dem Hamilton'schen Prinzip entwickelt.

Kirchhoff hatte auch die Kräfte abgeleitet, welche von zwei Ringen, die in eine Flüssigkeit tauchen, scheinbar auf einander ausgeübt werden. (Ges. Abh. S. 404.)

Dann hat aber Boltzmann (Crelle Bd. 73; 1871) gezeigt, dass diese Ableitung der äusseren Kräfte, wie die Anwendung des Hamilton'schen Prinzips unrichtig sind, wenn die Flüssigkeit einen mehrfach zusammenhängenden Raum erfüllt. Von ihm rühren die exakten Ausdrücke für die Kräfte her, welche zwei Ringe in einer Flüssigkeit auf einander ausüben. Eine Verall-

gemeinerung des Hamilton'schen Prinzips, so dass es auch die Fälle einschliesst, wo die Flüssigkeit mehrfach zusammenhängende Räume erfüllt, ist von C. Neumann gegeben (Hydrodynamische Untersuchungen, Leipzig 1883).

Eine ähnliche Modification rührt von C. Larmor her (Proc. Lond. Math. Soc. 15, 1884).

Weitere Untersuchungen sind von J. Purser (Phil. Mag. Nov. 1878), Basset (Hydrodynamics, Cambridge 1888 cap. VIII, Lamb, Hydrodynamics, Cambridge 1895 cap. VI) angestellt.

Die Minimalsätze 27a) und 28) und die Zerlegung der lebendigen Kraft hat H. Minkowski abgeleitet (Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit; Berl. Ber. 25. Oct. 1888).

Die Integration der allgemeinen dynamischen Gleichungen ist für einen Rotationskörper vollständig von Kirchhoff durchgeführt (a. a. O.).

Dann hat Clebsch gezeigt (Math. Ann. 3, S. 238), dass das Problem auf Quadraturen zurückgeführt ist, sobald ausser den drei gegebenen Integralen (15) und (17a) noch ein viertes, von t freies Integral bekannt ist. Er hat dann Fälle aufgesucht, wo das vierte Integral ebenfalls eine homogene, quadratische Function von p, q, r, u, v, w ist. Er wurde hierbei auf den Fall geführt, wo die lebendige Kraft die Form hat

$$2L = A_1 u^2 + A_2 v^2 + A_3 w^2 + B_1 p^2 + B_2 q^2 + B_3 r^2,$$

wo zwischen den Coefficienten die Gleichung besteht

$$B_1 \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_3}\right) + B_2 \left(\frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_1}\right) + B_3 \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}\right) = 0.$$

H. Weber (Math. Ann. 14, S. 173) hat dann unter der Annahme, dass $J_1 = 0$ ist (vgl. Gleichung 27), sämmtliche, die Lage des Körpers bestimmende Grössen durch Thetafunctionen zweier Veränderlichen dargestellt, deren Argumente lineare Functionen der Zeit sind.

Ohne diese beschränkende Voraussetzung hat dann F. Kötter (Crelle, Bd. 109, S. 51) das Problem für diesen Specialfall vollständig erledigt.

Die Bewegung eines Körpers, wenn $u = v = w = 0$ sind, lässt sich ebenfalls vollständig geben. (Lamb, Hydrodynamics, S. 180; Craig, The motion of a solid in a fluid; American Journ. of Math. II, 1879.)

Weitere specielle Fälle sind behandelt von Larmor (On hydrokinetic symmetry, Quart. Journ. Math. XX, 1885), Lamb (Hydrodynamics, S. 182 ff.);

Greenhill (On the motion of a cylinder through a frictionless liquid under no forces; Mess. of Math., Bd. 9, 1880);

W. Thomson (Hydrokinetic solutions and observations; Phil. Mag. Nov. 1871), Basset (On the motion of a ring in an infinite liquid; Proc. Camb. Phil. Soc. 6, 1887).

Die Bewegung zweier Kugeln in einer Flüssigkeit und die gegenseitige Einwirkung, wenn die Kugeln Schwingungen ausführen, ist von Bjerknes behandelt (Mémoire sur le mouvement simultané de corps sphériques variables dans un fluide indéfini et incompressible, Christiania 1871) und von W. Thomson (Proc. Royal Soc. 19, 1869; Phil. Mag., Nov. 1870). Von diesem rührt auch das Ergebniss her, dass eine in einer Flüssigkeit fallende Kugel von einer festen Wand angezogen wird.

V. Theorie der Wellen.

Die Theorie der Wellen an der freien Oberfläche einer Flüssigkeit ist für den Fall, dass keine Drehungen in der Flüssigkeit vorhanden sind, als eine Näherungstheorie zu bezeichnen. Nur in dem Falle, dass Drehungen der Flüssigkeitstheile vorkommen, lassen sich für eine bestimmte Wellenform die physikalischen Grenzbedingungen an der Oberfläche streng erfüllen. Da aber Drehungsbewegungen durch conservative Kräfte nicht hervorgerufen werden können, so sind die gewöhnlich an der Wasseroberfläche vorhandenen Wellen solche, bei denen die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials vorausgesetzt werden muss.

Die Näherungsmethoden, welche angewandt werden müssen, um die Bedingung constanten Drucks an der freien Oberfläche einer oder gleichen Drucks für die Trennungsfläche zweier Flüssigkeiten zu erfüllen, zeigen, dass immer geringe Unterschiede des Drucks bei den angenommenen Wellenformen zurückbleiben, welche also die Gestalt der Welle beständig verändern müssen. Es scheint daher zweifelhaft, ob es überhaupt eine Wellenform giebt, für die die Bedingung des Drucks mit Strenge erfüllbar ist und ob daher Wellen von ganz unveränderlicher Gestalt überhaupt vorhanden sind.

Die Theorie sehr niedriger Wellen, bei denen die quadratischen Glieder der von der Wellenbewegung herrührenden Geschwindigkeiten gegen die linearen vernachlässigt werden können, gestaltet sich sehr einfach. Um so verwickelter werden die Näherungsmethoden, wenn es sich um Wellen von beträchtlicherer Höhe handelt und die Ergebnisse lassen sich sehr schwer diskutieren. Da die Frage aber für die Meteorologie von erheblicher Bedeutung ist, so muss dieser Weg trotz der geringen mathematischen Eleganz eingeschlagen werden.

Die Theorie der Wellen von unveränderter Gestalt und constanter Fortpflanzungsgeschwindigkeit wird wesentlich vereinfacht, wenn man die Bewegung auf das Coordinatensystem bezieht, das mit den Wellen fest verbunden bleibt. In Bezug auf dieses Coordinatensystem ist dann die ganze Bewegung stationär.

Wir setzen dann, indem wir die ganze Bewegung parallel der xy-Ebene annehmen (vgl. S. 87),

$$\varphi + i\psi = Ae^{m(y+ix)} + Be^{-(y+ix)m} - ia(y+ix),$$

wo A, B, a, m Constanten bezeichnen.

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \varphi &= (Ae^{my} + Be^{-my}) \cos mx + ax, \\ \psi &= (Ae^{my} - Be^{-my}) \sin mx - ay. \end{aligned} \qquad 1)$$

Nun soll in der Richtung y die Schwere wirken und die x-Axe in der Oberfläche der ruhenden Flüssigkeit liegen. In der Entfernung $y = h$ befinde sich eine horizontale feste Wand, an der ψ constant sein muss. Hieraus folgt zunächst

$$Ae^{mh} - Be^{-mh} = 0.$$

In der Oberfläche soll ebenfalls ψ constant sein. Wir nehmen hier $\psi = 0$ an und setzen A und B als klein voraus.

Da hiernach die Wellen sehr niedrig sind, so sind die Werthe von y in der Oberfläche ebenfalls klein. Dann ist in erster Näherung für die Oberfläche

$$\begin{aligned} ay &= (A - B) \sin mx \\ &= A(1 - e^{2mh}) \sin mx. \end{aligned} \qquad 2)$$

Für den Druck haben wir

$$\frac{p}{s} = -gy - \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] + \text{const}$$

und bei Vernachlässigung von Grössen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} &= -gy - Aa(1 + e^{2mh})\, m \sin mx + \text{const} \\ &= \left[-g\frac{(1 - e^{2mh})}{a} A - Aa(1 + e^{2mh})\, m\right] \sin mx + \text{const}. \end{aligned}$$

Der Druck ist also constant, wenn

$$a^2 = \frac{g}{m} \frac{e^{2mh} - 1}{e^{2mh} + 1} \text{ ist.} \tag{3}$$

Nach Gleichung 2) ist die Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{m}$.

In der Entfernung h haben wir eine constante horizontale Strömung von der Geschwindigkeit a.

Fügen wir dem ganzen System eine Geschwindigkeit $-a$ parallel der x-Axe hinzu, so ruht die Flüssigkeit für $y = h$ und die Wellen schreiten mit der Geschwindigkeit $-a$ fort.

Wir erhalten dann in Bezug auf ein festes Coordinatensystem x', y

$$\varphi = A\left(e^{my} + e^{2mh - my}\right) \cos m\,(x' + at).$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit a ist im Allgemeinen von der Wellenlänge abhängig. Nur wenn λ sehr gross gegen die Tiefe h wird, ist nach 3)

$$a = \sqrt{gh}. \tag{4}$$

Wenn die Tiefe unendlich wird, ist

$$a = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \tag{5}$$

Befindet sich an der Stelle $x' = 0$ eine verticale feste Wand, so muss dort $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ verschwinden. Wir haben dann

$$\varphi = A\left(e^{my} + e^{2mh - my}\right) [\cos m\,(x' + at) - \cos m\,(x' - at)]. \tag{6}$$

Hierdurch ist die Reflexion eines zweiten in entgegengesetzter Richtung schreitenden Wellenzuges ausgesprochen.

Wir können auch schreiben

$$\varphi = -2A\left(e^{my} + e^{2mh - my}\right) \sin mx' \sin mat. \tag{7}$$

Hierdurch wird ein System stehender Wellen dargestellt. Ist α eine ganze Zahl, so kann in der Entfernung $\frac{\alpha\pi}{m}$ eine zweite feste Wand vorhanden sein.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen kann scheinbar verschieden sein von der Geschwindigkeit einer Anzahl von Wellen als Ganzes genommen. Einzelne Wellen einer solchen

Gruppe schreiten schneller fort als die ganze Gruppe, so dass beständig neue Wellen am hinteren Ende der Gruppe entstehen und am vorderen verschwinden.

Die einfachste Form solcher Gruppen lässt sich nach Lord Rayleigh durch Uebereinanderlagerung zweier Wellensysteme von etwas verschiedener Wellenlänge und Fortpflanzungsgeschwindigkeit gewinnen. Sei y_1 die Erhebung eines Wassertheilchens über die Horizontale, so haben wir

$$y_1 = \mathfrak{A}\,(\sin m_1\,(x - a_1 t) + \sin m_2\,(x - a_2 t))$$

$$= 2\mathfrak{A} \sin\left(\frac{m_1 + m_2}{2}\,x - \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{2}\,t\right) \cos\left(\frac{m_2 - m_1}{2}\,x - \frac{m_2 a_2 - m_1 a_1}{2}\,t\right).$$

Wenn m_1 nahe gleich m_2 ist, so ist auch a_1 nahe gleich a_2 und in Folge dessen $m_2 - m_1$ und $a_2 - a_1$ klein, der Cosinus also ändert seinen Werth langsam. Wir haben es also mit einer Wellenlinie zu thun, deren Amplitude langsam von $2A$ auf 0 sinkt und wieder ansteigt. Dadurch werden Gruppen von Wellen dargestellt, die von nahe wellenfreiem Wasser von einander getrennt sind. Symmetrische Punkte zweier Gruppen sind um die Strecke $\frac{4\pi}{m_2 - m_1}$ von einander entfernt, die Geschwindigkeit der Gruppe also $\frac{m_2 a_2 - m_1 a_1}{m_2 - m_1}$. Ist $m_2 = m + dm$, $m_1 = m$, entsprechend $m_2 a_2 = ma + d\,(ma)$, $a_1 = a$, so haben wir beim Grenzübergang für die Gruppengeschwindigkeit

$$\frac{d\,(ma)}{dm} = a + m\,\frac{da}{dm} = a - \lambda\,\frac{da}{d\lambda}.$$

Die Gruppengeschwindigkeit ist also immer kleiner als die Wellengeschwindigkeit, wenn diese mit zunehmender Wellenlänge zunimmt, wie es bei den Wasserwellen nach 5) der Fall ist. Auf ganz flachem Wasser müssen Gruppengeschwindigkeit und Wellengeschwindigkeit übereinstimmen. Auf tiefem Wasser ist die Geschwindigkeit der Gruppen halb so gross wie die der Wellen.

§ 1.

Theorie der Wellen an der Grenze zweier Flüssigkeiten.

Wir gehen nun gleich dazu über, die Theorie der Wellen an der Grenze zweier Flüssigkeiten zu entwickeln und zwar nach einer Näherungsmethode, die zuerst von Helmholtz gebraucht wurde. Die Voraussetzungen sind folgende: Es sind zwei Flüssig-

keiten über einander gelagert, beide strömen in einer bestimmten Entfernung von der Wellenlinie horizontal. Die horizontale Strömung der oberen Flüssigkeit bezeichnen wir mit a_1, die der unteren mit $-a_2$. Legen wir dann dem ganzen System eine Geschwindigkeit a_2 bei, so bringen wir die tieferen Schichten der unteren Flüssigkeit zur Ruhe, während die Geschwindigkeit der oberen Flüssigkeit $a_1 + a_2$, die der Wellen a_2 ist. Alle Bewegungen sind parallel der xy-Ebene. Die y-Axe ist senkrecht, die x-Axe horizontal gerichtet und zwar liegt diese in der Trennungslinie der Flüssigkeiten, wenn keine Wellen vorhanden sind. Die Gestalt der Wellen hängt nur von den Werthen der Geschwindigkeiten a_1 und a_2 ab.

Ausser der Bedingung, dass die Flüssigkeiten in bestimmter Entfernung horizontal strömen, ist noch die zu erfüllen, dass die Trennungslinie Strömungslinie für beide Flüssigkeiten ist. Diese Forderung muss im Gegensatz zu den gewöhnlich angewandten Theorien mathematisch streng erfüllt werden, weil selbst ein geringes Uebereinandergreifen der angrenzenden Stromlinien beider Flüssigkeiten physikalisch die Bedeutung des Hineinpressens der einen in die andere haben würde, wodurch unendliche Druckkräfte entstehen müssten.

Die Bedingung der Gleichheit des Drucks an beiden Seiten der Trennungsfläche kann dagegen nur annähernd erfüllt werden.

Bezieht sich der Index 1 auf die obere, 2 auf die untere Flüssigkeit, so muss in der Oberfläche ψ_1 und ψ_2 constant sein. Wir wählen die Constante so, dass hier $\psi_1 = \psi_2 = 0$ ist. Da nun

$$p = \text{const} - sgy - \tfrac{1}{2}s\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right] \quad \text{ist} \qquad 8)$$

und $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)^2$ ist, wenn n die Normale bezeichnet, so ist an der Oberfläche

$$p_1 = p_2 \quad \text{oder}$$

$$\text{const} = (s_1 - s_2)\,gy + \tfrac{1}{2}s_1\left(\frac{\partial\psi}{\partial n_1}\right)^2 - \tfrac{1}{2}s_2\left(\frac{\partial\psi}{\partial n_2}\right)^2. \qquad 9)$$

Es werden nun $y + ix$ und $\psi + i\varphi$ als eindeutige Functionen einer complexen Veränderlichen $\vartheta + i\eta$ dargestellt; $\eta = h$ soll dann die Gleichung der Oberfläche sein, wo h constant ist. An der Oberfläche muss ψ constant sein, und an der horizontalen Strömungslinie muss ψ und y constant sein.

Wir haben zunächst

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial x}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\vartheta} + \frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\vartheta} = 0, \quad \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial y} = 0.$$

In der Oberfläche ist ψ und η constant; also $\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} = 0$ und

$$\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]_{\eta=h} = \frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2_{\eta = h.}} \tag{10}$$

Wir führen nun noch eine Variable $\sigma + \tau i$ ein, die mit $y + ix$ durch die Gleichung

$$e^{m(y+ix)} = \sigma + \tau i \tag{11}$$

zusammenhängt. Hieraus folgt

$$m(y + ix) = \log(\sigma + \tau i), \quad \sigma = e^{my}\cos mx, \quad \tau = e^{my}\sin mx,$$
$$my = \tfrac{1}{2}\log(\sigma^2 + \tau^2), \tag{12}$$
$$mx = \operatorname{arctg}\frac{\tau}{\sigma}.$$

Wenn wir in $\sigma\tau$-Ebene eine geschlossene Curve betrachten, die den Punkt $\sigma = \tau = 0$ umgiebt und wir lassen den Radiusvector $\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ vom Werthe $\operatorname{arctg}\frac{\tau}{\sigma} = 0$ bis 2π einen Umlauf machen, so geht mx von 0 bis 2π. Lassen wir den Radiusvector weiter gehen, so wächst mx weiter, während $\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ die früheren Werthe wieder annimmt. Wir erhalten also in der xy-Ebene eine periodische Linie, deren Wellenlänge im Allgemeinen $\frac{2\pi}{m}$ ist.

Liegt die Curve symmetrisch zur σ-Axe, so haben wir auch symmetrische Wellen. Wellenthal oder Wellenberg liegen dann an den Punkten $\operatorname{arctg}\frac{\tau}{\sigma} = 0$ oder π, weil dort das Maximum oder Minimum von $\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ liegt. Liegt die Curve auch symmetrisch zur τ-Axe, so liegt Maximum oder Minimum an dem Punkte $\operatorname{arctg}\frac{\tau}{\sigma} = 0$ oder $\frac{\pi}{2}$. Daher ist in diesem Falle die Wellenlänge $\frac{\pi}{m}$.

Wir entwickeln nun $m(y + ix) = \log(\sigma + \tau i)$ nach der Reihe

$$\log(1 + x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - + \ldots . \qquad 13)$$

Wir können dann mx und my im allgemeinen auf folgende Form bringen als Function der complexen Veränderlichen $\vartheta + \eta i$

$$\begin{aligned} my = \text{const} + \eta + \mathfrak{A}_1 e^{-\eta} \cos\vartheta + \frac{\mathfrak{A}_2}{2} e^{-2\eta} \cos 2\vartheta + \ldots . \\ + \mathfrak{B}_1 e^{\eta} \cos\vartheta + \frac{\mathfrak{B}_2}{2} e^{2\eta} \cos 2\vartheta + \ldots ., \end{aligned} \qquad 13a)$$

$$\begin{aligned} mx = \text{const} - \vartheta + \mathfrak{A}_1 e^{-\eta} \sin\vartheta + \mathfrak{A}_2 e^{-2\eta} \sin 2\vartheta + \ldots . \\ - \mathfrak{B}_1 e^{\eta} \sin\vartheta - \frac{\mathfrak{B}_2}{2} e^{2\eta} \sin 2\vartheta \ldots . \end{aligned}$$

Ferner setzen wir im Allgemeinen

$$\begin{aligned} \frac{\psi_2 + i\varphi_2}{b_2} = -m(y + ix) + \mathfrak{A}_1 e^{-h} \frac{\cos(\vartheta + \eta i)}{\cos hi} + \frac{\mathfrak{A}_2}{2} e^{-2h} \frac{\cos 2(\vartheta + \eta i)}{\cos 2hi} \\ + \text{Const} + \mathfrak{B}_1 e^{h} \frac{\cos(\vartheta + \eta i)}{\cos hi} + \frac{\mathfrak{B}_2}{2} e^{2h} \frac{\cos 2(\vartheta + \eta i)}{\cos 2hi}, \end{aligned} \qquad 14)$$

also

$$\begin{aligned} \frac{\psi_2}{b_2} = -my + \mathfrak{A}_1 e^{-h} \frac{\cos\vartheta \cos\eta i}{\cos hi} + \frac{\mathfrak{A}_2}{2} e^{-2h} \frac{\cos 2\vartheta \cos 2\eta i}{\cos 2hi} + \ldots . \\ + \text{const} + \mathfrak{B}_1 e^{h} \frac{\cos\vartheta \cos\eta i}{\cos hi} + \frac{\mathfrak{B}_2}{2} e^{2h} \frac{\cos 2\vartheta \cos 2\eta i}{\cos 2hi} + \ldots . \end{aligned} \qquad 15)$$

Für $\eta = h$ ist $\psi_2 = 0$. Hiermit ist die eine Bedingung erfüllt. Ferner ist

$$\frac{1}{b_2} \frac{\partial\psi}{\partial\eta} = -1 + (\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_1) \frac{\cos\vartheta}{\cos hi} + (\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_2) \frac{\cos 2\vartheta}{\cos 2hi} + \ldots . \qquad 16)$$

h soll immer positiv sein. Also sind die $\mathfrak{B}$ immer erheblich kleiner als die $\mathfrak{A}$. Wird das Glied mit $\cos 3\vartheta$ vernachlässigt, so entscheidet die Grösse der Glieder

$$\frac{2\mathfrak{A}_3}{\cos 2hi} + \frac{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2}{\cos hi \cos 2hi},$$

$$2(\mathfrak{A}_3 e^{-3h} - \mathfrak{B}_3 e^{3h}) + (\mathfrak{A}_1 e^{-h} - \mathfrak{B}_1 e^{h})(\mathfrak{A}_2 e^{-2h} - \mathfrak{B}_2 e^{2h})$$

im Vergleich zur Einheit über den Grad der Annäherung. Für die untere Flüssigkeit ist $\eta < h$. Daher convergirt die Reihe 14) immer. Für $x = -\infty$ ist

$$\frac{\psi_2}{b_2} = -my, \quad \frac{\partial\psi_2}{\partial y} = -mb_2 = -a_2 .$$

Die Flüssigkeit strömt also im Unendlichen mit der constanten Geschwindigkeit a_2. Wir setzen zur Abkürzung

$$\mathfrak{P} = \frac{m s_1 a_1^2}{g(s_2 - s_1)}, \qquad \mathfrak{Q} = \frac{m s_2 a_2^2}{g(s_2 - s_1)}. \tag{17}$$

Dann wird die Bedingung gleichen Drucks

$$C\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\right] = y\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\right] + \frac{\mathfrak{P}}{2a_1^2}\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \eta}\right)^2 - \frac{\mathfrak{Q}}{2a_2^2}\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \eta}\right)^2. \tag{18}$$

Die im Werthe von y vorkommende Constante kann zu C hinzugefügt werden und kommt daher nicht in Betracht.

Wenn g positiv gerechnet wird, wirkt die Schwere in der Richtung der negativen y; dann muss bei stabilem Gleichgewicht $s_2 > s_1$ sein. Wir können aber auch die obere Flüssigkeit als die dichtere annehmen, wenn gleichzeitig $-g$ für g gesetzt wird. Beziehen wir dann den Index 1 auf die dichtere Flüssigkeit, so erhalten wir eine Vertauschung von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$.

Die seitliche Begrenzung des betrachteten Raumes wird durch zwei in der Entfernung einer Wellenlänge senkrecht gezogene Linien bestimmt. Wegen der Periodicität müssen die Geschwindigkeiten an diesen Linien dieselben Werthe annehmen. Diese Vorschrift ersetzt die sonst nöthigen Grenzbedingungen, dass ψ an diesen Linien vorgeschriebene Werthe besitzen muss, wenn die Bewegung bestimmt sein soll. Hiernach ist

$$\psi_x = \psi_{x+\lambda}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x_x} = \frac{\partial \psi}{\partial x_{x+\lambda}}.$$

Diese Gleichungen sind erfüllt, wenn ψ, $\frac{\partial \psi}{\partial \eta}$, $\frac{\partial x}{\partial \eta}$, $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ periodisch nach der Wellenlänge sind.

Die Form der Entwicklung für x und y enthält schon die Beschränkung auf symmetrische Wellen, für unsymmetrische Wellen lässt sich die Bedingung gleichen Drucks auch nicht annähernd erfüllen und diese Wellen müssen daher, wie es scheint, die Gestalt schnell mit der Zeit verändern. Es lassen sich zur Untersuchung der Wellenform drei verschiedene Curvenarten in der $\sigma\tau$-Ebene benutzen: 1) die Ellipse, 2) die Lemniskate, 3) die Curven, welche durch Abbildung elliptischer Functionen entstehen.

Wir setzen hiernach zunächst

$$e^{m(y+xi)} = \sigma + \tau i = [\cos(\vartheta + \eta i) - \cos \varepsilon], \tag{19}$$

wo ε eine reelle Constante ist.

Hieraus folgt

$$\sigma = \cos\vartheta \cos\eta i - \cos\varepsilon,$$
$$\tau = i \sin\vartheta \sin\eta i$$

oder

$$\frac{(\sigma + \cos\varepsilon)^2}{\cos^2\eta i} - \frac{\tau^2}{\sin^2\eta i} = 1,$$
$$\frac{(\sigma + \cos\varepsilon)^2}{\cos^2\vartheta} - \frac{\tau^2}{\sin^2\vartheta} = 1. \tag{20}$$

Nun ist

$$\cos\eta i = \frac{e^\eta + e^{-\eta}}{2}, \qquad \sin\eta i = i\,\frac{e^\eta - e^{-\eta}}{2}.$$

Es sind also die Linien $\eta = \text{const}$ Ellipsen mit den Halbaxen $\frac{e^\eta + e^{-\eta}}{2}$, $\frac{e^\eta + e^{-\eta}}{2}$, die Linien $\vartheta = \text{const}$ Hyperbeln. Der Punkt $\sigma = \tau = 0$ liegt in der Entfernung $\cos\varepsilon$ vom Mittelpunkte der Ellipse.

Für die obere Flüssigkeit sei nun

$$\psi_1 + i\varphi_1 = -b_1 h - i b_1 (\vartheta + \eta i), \tag{21}$$

wo b_1 eine Constante bezeichnet. Für $\eta = h$ wird $\psi_1 = 0$, für $\eta = \infty$ wird nach 19)

$$my = \eta = \frac{\psi_1}{b_1} + h, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial y} = mb_1 = a_1.$$

Die obere Flüssigkeit strömt also im Unendlichen mit der Geschwindigkeit a_1. Für $\vartheta = \varepsilon$, $\eta = 0$ wird

$$my = + \log(\vartheta - \varepsilon) + \log\sin\varepsilon.$$

Durch Bildung der logarithmischen Reihe 13) ergiebt sich

$$m(y + ix) = \eta - i\vartheta - 2\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\infty} \frac{e^{\mathfrak{a} i(\vartheta + \eta i)}}{\mathfrak{a}} \cos\mathfrak{a}\varepsilon. \tag{22}$$

Nach dem gegebenen Schema der Druckgleichung 18) kann man diese bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung als e^{-2h} auf die Form bringen

$$\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 \cos\vartheta + \mathfrak{A}_2 \cos 2\vartheta = 0. \tag{23}$$

Durch Nullsetzen der Coefficienten erhalten wir die Gleichungen, aus denen noch die Constante C zu eliminiren ist.

Setzen wir $\frac{1}{\cos hi} = \zeta$, so erhalten wir als Ergebniss

$$\begin{aligned} 1 - \zeta^2 \cos^2 \varepsilon - \mathfrak{P} - \mathfrak{Q} \left(1 - \tfrac{1}{2} \zeta^2\right) = 0\,, \\ 2 \cos^2 \varepsilon + 1 - \mathfrak{Q} \left(4 \cos^2 \varepsilon - \zeta^2\right) = 0\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Die Wellenhöhe ist

$$H = \frac{\lambda}{2\pi} \log \left(\frac{1 + \zeta \cos \varepsilon}{1 - \zeta \cos \varepsilon}\right). \tag{25}$$

Bei Vergleichung von Wellen gleicher Höhe muss

$$\zeta^2 \cos^2 \varepsilon = \frac{1 + \mathfrak{Q} \zeta^2}{4 \mathfrak{Q} - 2} \zeta^2 \tag{26}$$

denselben Werth haben.

Für die Abbildung durch elliptische Functionen bezeichnen wir mit

- K das vollständige elliptische Integral erster Gattung in Bezug auf den Modul k,
- K' dasselbe Integral in Bezug auf den Modul $\sqrt{1 - k^2} = k'$,
- q die Grösse $e^{-\pi \frac{K'}{K}}$.

Wir setzen nun

$$X + Yi = \log \sin am \left\{\frac{2K}{\pi} [\vartheta + (\eta - h) i] + \frac{iK'}{2}\right\}, \tag{27}$$

ferner setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{2K}{\pi} \vartheta = u, \quad \frac{2K}{\pi} \left(\eta - h + \frac{K'}{K} \frac{\pi}{4}\right) = v,$$

so folgt

$$X = \tfrac{1}{2} \log \frac{\sin^2 am\, u \cos^2 am\, iv\, \varDelta^2 am\, iv - \sin^2 am\, iv \cos^2 am\, u\, \varDelta^2 am\, u}{(1 - k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\, iv)^2},$$

für $\eta = h$ wird $v = \frac{K'}{2}$, $\sin am\, iv = \frac{i}{\sqrt{k}}$, $\cos am\, iv\, \varDelta\, am\, iv = \frac{(1 + k)}{\sqrt{k}}$.

$$X = \tfrac{1}{2} \log \frac{x^2 (1 + k)^2 + (1 - x^2)(1 - k'^2 x^2)}{k (1 + k x^2)^2} = \tfrac{1}{2} \log \frac{1}{k}. \tag{28}$$

Ferner wird

$$\log \sin am \left[\frac{2K}{\pi} (\vartheta + \eta i) + iK'\right] = \log \frac{1}{k \sin am \frac{2K}{\pi} (\vartheta + \eta i)}$$

für $\vartheta = \eta = 0$ unendlich wie

$$\log \frac{1}{k} - \log \frac{2K}{\pi} + \log \frac{1}{\vartheta + \eta i},$$

wie aus der Potenzenreihe für sin *am* S. 118 folgt.

Also wird der reelle Theil gleich

$$\log \frac{1}{k} - \log \frac{2K}{\pi} + \log \frac{1}{\sqrt{\vartheta^2 + \eta^2}}. \tag{29}$$

Endlich wird

$$\log \sin am \frac{2K}{\pi} (\vartheta + \eta i)$$

für $\vartheta = \eta = 0$ negativ unendlich wie

$$\log \frac{2K}{\pi} + \log (\vartheta + \eta i). \tag{30}$$

Wir setzen nun

$$m(y + xi) = \log(\sigma + \tau i) = \log \sin am \frac{2K}{\pi} (\vartheta + \eta i) + \log c_0, \tag{31}$$

wo $\log c_0$ eine Constante bezeichnet,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\psi_1 + i\varphi_1}{b_1} &= \log \sin am \left[\frac{2K_1}{\pi} (\vartheta + (\eta - h)i) + \frac{iK'_1}{2}\right] - \tfrac{1}{2} \log \frac{1}{k_1} \\ \frac{\psi_2 + i\varphi_2}{b_2} &= \log \sin am \left[\frac{2K_2}{\pi} (\vartheta + (\eta - h)i) + \frac{iK'_2}{2}\right] - \tfrac{1}{2} \log \frac{1}{k_2}. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Dann ist nach 28) für $\eta = h$, $\psi_1 = \psi_2 = 0$.

Die Module k_1 und k_2 bestimmen sich durch die Vorschrift, dass im Unendlichen die Strömung horizontal laufen soll.

Setzen wir

$$\frac{K_1 K'}{K} - \frac{2}{\pi} K_1 h + \frac{K'_1}{2} = K'_1, \text{ d. h. } qe^{-2h} = \sqrt{q_1},$$

$$\text{also } h = \frac{\pi}{2} \left(\frac{K'}{K} - \frac{K'_1}{2K_1}\right),$$

so wird nach 29) für $\eta = \frac{K'}{K} \frac{\pi}{2}$, $\vartheta = 0$

$$my = -\log k - \log \frac{2K}{\pi} - \log \sqrt{\vartheta^2 + \left(\eta - \frac{K'}{K} \frac{\pi}{2}\right)^2} = \infty$$

$$\frac{\psi_1}{b_1} = -\tfrac{1}{2} \log k_1 - \log \frac{2K}{\pi} - \log \sqrt{\vartheta^2 + \left(\eta - \frac{K'}{K} \frac{\pi}{2}\right)^2}.$$

Also ist für $x = \infty$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = m b_1 = a_1 .$$

Wir setzen weiter

$$\frac{2K_2}{\pi} h = \frac{K_2'}{2}, \quad \text{also } q_2 = e^{-4h}.$$

Dann ist nach 30) für $\vartheta = \eta = 0$

$$my = \log \frac{2K}{\pi} + \log \sqrt{\vartheta^2 + \eta^2} + \log c_0 = -\infty,$$

$$\frac{\psi_2}{b_2} = \log \frac{2K_2}{\pi} + \log \sqrt{\vartheta^2 + \eta^2} - \tfrac{1}{2} \log \frac{1}{k_2}.$$

Es ist also

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial y} = b_2 m = -a_2 \text{ für } \vartheta = \eta = 0, \quad y = -\infty .$$

Aus der Druckgleichung folgen dann bei Vernachlässigung von Grössen von der Ordnung

$$e^{-6h}, \; qe^{-2h}, \; q^3 e^{6h}, \; q^2 e^{2h},$$

die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 - 4e^{-4h} + 12q^2 e^{4h} - qe^{4h} + 4q^3 e^{8h} - 12q \\ - 2(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q})(1 - qe^{4h} - 8q + 8q^2 e^{4h}) = 0 \\ (\tfrac{3}{4} - 2\mathfrak{P})\, qe^{4h} + (\tfrac{3}{4} - 2\mathfrak{Q}) = 0 . \end{aligned} \tag{33}$$

Diese Gleichungen bleiben auch für negative q giltig.
Setzen wir

$$\mathfrak{K} = k'K, \quad \mathfrak{K}' = \frac{k'}{i}(K + iK'), \quad \mathfrak{q} = e^{-\pi \frac{\mathfrak{K}'}{\mathfrak{K}}} = e^{i\pi - \pi \frac{K'}{K}} = -q,$$

so ist der zu $\mathfrak{K}$ gehörende Modul $\frac{ik}{k'}$. Nun ist

$$\sin am\left(v, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{k' \sin am\left(\frac{v}{k'}, k\right)}{\Delta\, am\left(\frac{v}{k'}, k\right)} = \cos am\left(\frac{v}{k'} - K, k\right).$$

Negative q geben also die durch die Function $\cos am$ dargestellten Wellenformen. Dabei bleiben q_1 und q_2 ungeändert. Die Wellenhöhe ist

$$H = \frac{\lambda}{\pi} \log \frac{\cos am \frac{2K}{\pi} ih \, \varDelta \, am \frac{2K}{\pi} ih}{\frac{1}{i} \sin am \frac{2K}{\pi} ih \left(1 - k^2 \sin^2 am \frac{2K}{\pi} ih\right)}.$$

Während bei Abbildung durch elliptische Functionen die beiden Parameter k und h frei verfügbar sind, können wir mit ihrer Hülfe auch Wellen auf einer Flüssigkeit von endlicher Tiefe darstellen, wobei dann aber die Entfernung der horizontalen Grenze von der Niveauebene durch diese beiden Parameter ausgedrückt wird. Ist also die Tiefe gegeben, so ist nur noch ein Parameter unbestimmt.

Wir setzen

$$\frac{\psi_1 + i\varphi_1}{b_1} = -h - i(\vartheta + i\eta), \tag{34}$$

für $\eta = h$ ist $\psi_1 = 0$. Nach 28) und 31) wird für

$$\eta = \frac{K'}{K} \frac{\pi}{4}, \qquad my = \tfrac{1}{2} \log \frac{1}{k} + \log c_0 = \frac{\mathfrak{H}_1 \pi}{\lambda}. \tag{35}$$

In der Entfernung $\mathfrak{H}_1$ von der Niveauebene strömt die obere Flüssigkeit horizontal. Ihre Geschwindigkeit ist aber nicht constant. Es ist nämlich

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} \frac{\frac{\partial y}{\partial \eta}}{\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2}.$$

Für $\eta = \frac{K'}{K} \frac{\pi}{4}$ wird

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = 0, \quad m \frac{\partial y}{\partial \eta} = 1 + 4\sqrt{q} \cos 2\vartheta + 4q \cos 4\vartheta + \ldots,$$

also

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = \frac{m b_1}{1 + 4\sqrt{q} \cos 2\vartheta + 4q \cos 4\vartheta + \ldots}. \tag{36}$$

Dabei ist

$$\frac{\pi \mathfrak{H}_1}{\lambda} = \tfrac{1}{4} \log \frac{1}{\varepsilon} + e^{-4h} - q^2 e^{4h} + \tfrac{1}{2}(e^{-8h} - q^4 e^{8h}) \ldots,$$

ferner

$$2\mathfrak{Q} = \tfrac{3}{4}(1 + \varepsilon), \tag{37}$$

$$2\mathfrak{P} = \frac{1 - \varepsilon - 4e^{-4h}[1 - \varepsilon^3 - 3(\varepsilon^2 - \varepsilon)] - 2\mathfrak{Q}[1 - \varepsilon - 8e^{-4h}\varepsilon(1 - \varepsilon)]}{1 + \varepsilon}. \tag{37.a}$$

Um die conforme Abbildung durch Lemniskaten zu benutzen, setzen wir

$$\sigma + \tau i = Z = \sqrt{\mathfrak{w} + 1}\,. \tag{38}$$

Die Riemann'sche Fläche der complexen Variabeln $\mathfrak{w}$ ist zweiblättrig mit einem Verzweigungspunkte für $\mathfrak{w} = -1$ und einem für $\mathfrak{w} = \infty$. Kreisen in der $\mathfrak{w}$-Ebene entsprechen Lemniskaten in der Z-Ebene, dem einen Blatte der $\mathfrak{w}$-Ebene entsprechen die positiven Theile der Z-Ebene, dem anderen die negativen. Da Z eine eindeutige Function von $\mathfrak{w}$ sein muss, so muss es durch eine neue Variable ersetzt werden, sodass den beiden Blättern ein Blatt entspricht, ohne dass die Beziehung zwischen Lemniskaten und Kreisen zu gelten aufhört.

Durch die Beziehung

$$\zeta = \frac{\mathfrak{w} + 1}{\mathfrak{w} + a^4} \tag{39}$$

wird der erste Verzweigungspunkt in den Punkt $\zeta = 0$ gelegt. Kreisen in der $\mathfrak{w}$-Ebene entsprechen Kreise in der ζ-Ebene.

Setzen wir dann

$$\mathfrak{z} = \sqrt{\zeta}\,, \tag{40}$$

so entspricht den beiden Blättern der ζ-Ebene ein Blatt der $\mathfrak{z}$-Ebene. Den Kreisen der ζ-Ebene entsprechen wieder Kreise der $\mathfrak{z}$-Ebene.

Diese Abbildung gilt aber nur für das innere Gebiet eines Kreises beziehentlich einer Lemniskate von bestimmtem Bereich. Es ist nämlich der Punkt $\mathfrak{w} = -1$ sowohl für die Z-Ebene als auch für die $\mathfrak{z}$-Ebene ein Verzweigungspunkt.

Aber der zweite Verzweigungspunkt liegt für $\mathfrak{z}$ bei $\mathfrak{w} = -a^4$, für Z bei $\mathfrak{w} = \infty$. Also sind die Blätter der $\mathfrak{w}$-Ebene ausserhalb des Kreises $\mathfrak{w} = -a^4$ nicht mehr für $\mathfrak{z}$ und Z dieselben.

Für die Abbildung des äusseren Gebiets wählen wir die Beziehungen

$$\mathfrak{w} = Z^2 - 1\,, \quad \mathfrak{z} = \frac{1}{a^2}\sqrt{\mathfrak{w}}. \tag{41}$$

Kreisen in der $\mathfrak{w}$-Ebene entsprechen wieder Kreise der $\mathfrak{z}$-Ebene. Der innere Verzweigungspunkt liegt für Z bei $\mathfrak{w} = -1$, für $\mathfrak{z}$ bei $\mathfrak{w} = 0$, also sind die Blätter innen nicht identisch, dagegen liegt der äussere Verzweigungspunkt für beide bei $\mathfrak{w} = \infty$. Im Folgen-

den soll sich der Index 1 auf den äusseren, 2 auf den inneren Raum beziehen. Wir setzen die complexe Variable $\mathfrak{z} = \mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$.

Wir haben also

$$Z_2 = \sigma_2 + \tau_2 i = (\mathfrak{x}_2 + i\mathfrak{y}_2)\sqrt{\frac{a^4 - 1}{1 - (\mathfrak{x}_2 + i\mathfrak{y}_2)^2}}. \tag{42}$$

Hieraus ergiebt sich folgende Gleichung

$$(\mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{y}_2^2)^2 = \frac{(\sigma_2^2 + \tau_2^2)^2}{(\sigma_2^2 + \tau_2^2)^2 + 2(a^4 - 1)(\sigma_2^2 - \tau_2^2) + (a^4 - 1)^2}, \tag{43}$$

ferner

$$\sigma_1 + \tau_1 i = \sqrt{a^4(\mathfrak{x}_1 + i\mathfrak{y}_1)^2 + 1}, \tag{44}$$

woraus

$$(\sigma_1^2 + \tau_1^2)^2 - 2(\sigma_1^2 - \tau_1^2) + 1 = a^8(\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{y}_1^2)^2 \quad \text{folgt.} \tag{45}$$

Die beiden Gleichungen 43) und 45) gehen für

$$\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{y}_1^2 = \mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{y}_2^2 = \frac{1}{a^2}$$

über in

$$(\sigma^2 + \tau^2)^2 - 2(\sigma^2 - \tau^2) + 1 - a^4 = 0, \tag{46}$$

die Gleichung der Lemniskate, der Grenzkurve beider Abbildungen.

Setzen wir nun

$$\mathfrak{x} + i\mathfrak{y} = e^{i(\vartheta + \eta i)},$$

so entsprechen den Kreisen $\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = \text{const}$ gerade Linien $\eta = \text{const}$.

Also entspricht auch der Lemniskate 46) eine Linie $\eta = \text{const}$ und zwar ist hier

$$e^{-2h} = \frac{1}{a^2}, \text{ also } a = e^h.$$

Wir verschieben in der $\sigma\tau$-Ebene das Coordinatensystem parallel der σ-Axe um die Grösse e^{-l}. Dadurch bekommt die Lemniskate eine excentrische Lage und wir gewinnen einen neuen Parameter.

Es ist dann

$$m(y_2 + x_2 i) = \text{const} + \log\left[e^{i(\vartheta + \eta i)} - \frac{e^{-l}\sqrt{1 - e^{2i(\vartheta + \eta i)}}}{\sqrt{e^{4h} - 1}}\right] \tag{47}$$

$$- \tfrac{1}{2}\log\left[1 - e^{2i(\vartheta + \eta i)}\right].$$

Wir entwickeln nun nach 13)

$$m(y_2 + x_2 i) = \text{const} + i\vartheta - \eta - \frac{e^{-i\vartheta + \eta - l}}{\sqrt{e^{4h} - 1}} - \frac{1}{2}\frac{e^{-2i\vartheta + 2\eta - 2l}}{e^{4h} - 1}$$

$$-\frac{1}{3}\frac{e^{-3i\vartheta + 3\eta - 3l}}{(\sqrt{e^{4h}-1})^3} \cdots + \frac{1}{2}\frac{e^{i\vartheta - \eta - l}}{\sqrt{e^{4h}-1}} \cdots + \frac{1}{2} e^{2i(\vartheta + \eta i)} \cdots$$

Die Reihe convergirt für $l > 0$ und $\eta = h$.

Weiter setzen wir

$$\frac{\psi_2 + i\varphi_2}{b_2} = \text{const} + m(y_2 + ix_2) + \frac{e^{i\vartheta - \eta - l + 2h}}{\sqrt{e^{4h}-1}} + \frac{1}{2}\frac{e^{2i\vartheta - 2\eta - 2l + 4h}}{e^{4h} - 1}$$

$$+ \frac{1}{3}\frac{e^{3i\vartheta - 3\eta - 3l + 6h}}{(\sqrt{e^{4h}-1})^3} \cdots - \frac{1}{2}\frac{e^{i\vartheta - \eta - l}}{\sqrt{e^{4h}-1}} \cdots - \frac{1}{2} e^{2i(\vartheta + \eta i)} \qquad 48)$$

für $\eta = h$ wird ψ_2 constant. Für $\eta = \infty$ ist $y_2 = -\infty$ und nach 48)

$$\frac{\psi_2}{b_2} = m y_2, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} = m b_2 = a_2.$$

Für den Raum 1 haben wir nach 44) zu setzen

$$m(y_1 + x_1 i) = \log\left[\sqrt{e^{4h + 2i\vartheta - 2\eta} + 1} - e^{-l}\right]$$

$$= \text{const} + i\vartheta - \eta + \log\left[\sqrt{1 + e^{-2i\vartheta + 2\eta - 4h}} - e^{-l - i\vartheta + \eta - 2h}\right]$$

$$= \text{const} + i\vartheta - \eta + \frac{1}{2} e^{-2i\vartheta + 2\eta - 4h} \cdots + \frac{1}{2} e^{-3i\vartheta - l + 3\eta - 6h} \cdots \qquad 49)$$

$$- e^{-i\vartheta + \eta - l - 2h} - \frac{1}{2} e^{-2i\vartheta + 2\eta - 2l - 4h} \cdots$$

Die Reihe convergirt für positive l und $\eta = h > 0$.

Für $\eta = -\infty$ wird

$$m(y_1 + ix_1) = \log(e^{i\vartheta - \eta}) = i\vartheta - \eta.$$

Wir setzen

$$-\frac{(\psi_1 + i\varphi_1)}{b_1} = \text{Const} + i\vartheta - \eta,$$

also

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} = -m b_1 = -a_1 \text{ für } y = \infty.$$

Für $\eta = h$ wird ψ_1 constant. Somit sind alle Grenzbedingungen ausser der Druckgleichung erfüllt. Diese wird wie früher mit Vernachlässigung von Grössen von der Ordnung e^{-3h} erfüllt und

ergiebt, wenn wir zur Abkürzung $e^{-2h} = \alpha$, $e^{-2l} = \beta$ setzen, die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 4\alpha\beta - 1 + (\mathfrak{P} + \mathfrak{Q})(1 - 2\alpha\beta) &= 0, \\ 2\beta - 1 - \mathfrak{P}(\beta - 2) - \mathfrak{Q}(3\beta - 2) &= 0. \end{aligned} \tag{50}$$

Hieraus findet sich

$$\mathfrak{Q} = \frac{1 - 6\alpha\beta + \beta}{2\beta(1 - 2\alpha\beta)}.$$

Die Wellenhöhe ist

$$H = \frac{\lambda}{2\pi} \log \frac{\sqrt{\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta}} + 1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta}} - 1}.$$

Wir können die gewonnenen Ergebnisse dazu verwerthen, den Einfluss des Windes auf die Gestalt der Wellen zu untersuchen.

Die Geschwindigkeit der Wellen ist a_2, die des Windes $a_1 + a_2$. Die erste Annäherung für die Gleichheit des Drucks, die sich unabhängig von der Wellenform ergiebt und aus Gleichungen 24), 33) und 50) übereinstimmend hervorgeht, ist die Gleichung

$$s_1 a_1^2 + s_2 a_2^2 = \frac{\lambda g (s_2 - s_1)}{2\pi}. \tag{51}$$

Hieraus folgt, dass bei kleinem a_1 der Werth von a_2 gross sein muss und umgekehrt. Da nun s_1 die Dichtigkeit der Luft ist, s_2 die des Wassers, so muss a_1 verhältnissmässig gross im Vergleich mit a_2 sein, wenn er denselben Einfluss haben soll. Die Gleichung 51) ist gleichbedeutend mit der ersten der Gleichungen 24), wenn wir ζ^2 vernachlässigen. Die Gleichung lautet dann

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{Q} = 1.$$

Grosse Werthe von $\mathfrak{Q}$ bedingen daher kleine von $\mathfrak{P}$, haben also nach 17) kleine von a_1 und somit geringe Windgeschwindigkeit, aber grosse a_2, also grosse Wellengeschwindigkeit zur Folge. Kleine Werthe von $\mathfrak{Q}$ entsprechen grossen von $\mathfrak{P}$, also grosser Windgeschwindigkeit.

Nun folgt aus der zweiten der Gleichungen 24)

$$\mathfrak{Q} = \frac{2\cos^2\varepsilon + 1}{4\cos^2\varepsilon - \zeta^2},$$

oder annähernd

$$\mathfrak{Q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\cos^2\varepsilon} + \frac{\zeta^2}{4\cos^2\varepsilon}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\cos^2\varepsilon}\right).$$

Grossen Werthen von $\cos\varepsilon$ und kleinen von ζ entspricht daher kleines $\mathfrak{Q}$, kleinen Werthen von $\cos\varepsilon$ und grösseren von ζ entspricht grösseres $\mathfrak{Q}$.

Bei grossen Werthen von ζ hat man in der $\sigma\tau$-Ebene Ellipsen grosser Excentricität; bei grossen Werthen von $\cos\varepsilon$ liegt der Pol des Radiusvector $\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ weiter vom Mittelpunkt der Ellipse entfernt. Ellipsen grösserer Excentricität entsprechen spitzeren Wellen. Es ist nämlich bei grösserer Excentricität bei gleicher Wellenhöhe der Werth von $\cos\varepsilon$ kleiner. Bei grösserer Excentricität der Ellipse und kleinerer Entfernung des Pols vom Mittelpunkt nimmt der Werth des Radiusvector in der Nähe seines Maximums schneller ab. Es entspricht dies also Wellen mit spitzeren Köpfen.

Spitzere Wellen entsprechen also grösserer Wellengeschwindigkeit und kleinerer Windgeschwindigkeit.

Genauer können wir diesen Einfluss der Windgeschwindigkeit bestimmen, wenn wir die Ergebnisse der Abbildung durch elliptische Coordinaten und die Lemniskate mit einander vergleichen.

Wir setzen dabei die Wellenhöhe H fest und ebenso den Werth von $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{Q}$ und ermitteln dann aus den Gleichungen 24) und 50) die dazu gehörenden Werthe von $\mathfrak{Q}$ oder $\mathfrak{P}$; die hierbei sich ergebende Verschiedenheit entspricht der Verschiedenheit der entsprechenden Wellenform.

Ist die Wellenlänge gegeben, so werden Unterschiede im Werthe von $\mathfrak{P}$ nur durch die Verschiedenheit der Geschwindigkeit bedingt, mit der die Luft den Wellen vorauseilt, während $\mathfrak{Q}$ dann nur von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen abhängt.

Einige Wellenformen, die solche Unterschiede in der Form erkennen lassen, wie sie zu verschiedenen Werthen von a_1 und a_2 gehören, sind in den folgenden Figuren gezeichnet; a_1 und a_2 sind die horizontalen Strömungen, wenn als obere Flüssigkeit Luft, als untere Wasser angenommen wird.

Dann ist $\frac{s_2}{s_1} = 773{,}4$. Die Wellenlänge λ ist gleich 1 m angenommen.

a_1' und a_1' sind dieselben Geschwindigkeiten, wenn die beiden

Flüssigkeiten Luft von der Temperatur 10^0 und 0^0 sind. Hier ist $\frac{s_2}{s_1} = \frac{283}{273}$. Die Wellenlänge ist gleich 100 m angenommen.

Zwei Wellen bei gleicher relativer Geschwindigkeit beider Flüssigkeiten a_1 und verschiedener Geschwindigkeit sind in Fig. 10 gezeichnet.

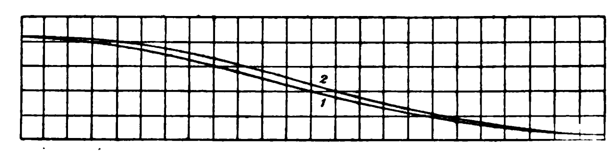


Fig. 10.

1.		2.	
$\zeta = 0{,}2502$	$\mathfrak{Q} = 0{,}7660$	$\alpha = \frac{1}{64}$	$\mathfrak{Q} = 0{,}6607$
$\cos\varepsilon = 0{,}9926$	$\mathfrak{P} = 0{,}1964$	$\beta = 4$	$\mathfrak{P} = 0{,}1964$
$H = \frac{\lambda}{2\pi}\, 0{,}5067$		$H = \frac{\lambda}{2\pi}\, 0{,}5067$	
$a_1 = 15{,}39$ m/sec	$a_1' = 1{,}060$ m/sec	$a_1 = 15{,}39$ m/sec	$a_1' = 1{,}060$ m/sec
$a_2 = 1{,}194$ m/sec	$a_2' = 2{,}246$ m/sec	$a_2 = 1{,}015$ m/sec	$a_2' = 1{,}909$ m/sec.

Die Curve 3 ist mit Curve 1 fast identisch, die Unterschiede sind so klein, dass sie in der Zeichnung nicht mehr deutlich hervortreten können; $3a$ ist eine hierzu gehörende Stromlinie der Luft.

Bei der Curve 4 ist $a_1 = 0$, dagegen die Wellengeschwindigkeit gross. Demgemäss tritt hier eine besonders grosse Verschiedenheit in der Form hervor.

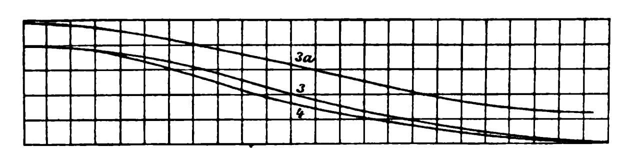


Fig. 11.

3.		4.	
$\alpha = 0{,}03482$	$\mathfrak{Q} = 0{,}7660$	$\zeta = 0{,}3328$	$\mathfrak{Q} = 0{,}9915$
$\beta = 1{,}833$	$\mathfrak{P} = 0{,}0877$	$\cos\varepsilon = 0{,}7513$	$\mathfrak{P} = 0$
$H = \frac{\lambda}{2\pi}\, 0{,}5067$		$H = \frac{\lambda}{2\pi}\, 0{,}5067$	

$a_1 = 10{,}285$ m/sec $a_1' = 0{,}708$ m/sec $a_1 = a_2' = 0$
$a_2 = 1{,}194$ m/sec $a_2' = 2{,}242$ m/sec $a_2 = 1{,}243$ m/sec $a_2' = 2{,}338$ m/sec.

Die Curven 5 und 6 haben gleiche Wellengeschwindigkeit, zu 6 gehört $a_1 = 0$. Der hier hervortretende Unterschied in der Form ist nur durch die verschiedene Windstärke $a_1 + a_2$ bedingt.

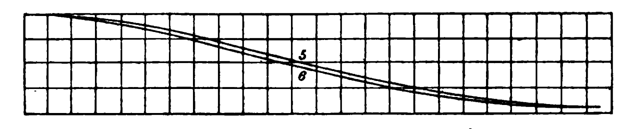


Fig. 12.

5. 6.

$\cos\varepsilon = 0{,}884$ $\mathfrak{Q} = 0{,}8421$ $\alpha = 0{,}05245$ $\mathfrak{P} = 0$
$\zeta = 0{,}288$ $\mathfrak{P} = 0{,}1281$ $\beta = 1{,}300$ $\mathfrak{Q} = 0{,}8421$

$a_1 = 12{,}43$ m/sec $a_1' = 0{,}856$ m/sec $a_1 = a_1' = 0$
$a_2 = 1{,}146$ m/sec $a_2' = 2{,}156$ m/sec $a_2 = 1{,}146$ m/sec $a_2' = 2{,}156$ m/sec

$$H = \frac{\lambda}{2\pi}\,0{,}517\,.$$

Wir sehen hieraus, dass die relative Geschwindigkeit beider Flüssigkeiten a_1 und die Wellengeschwindigkeit a_2 in entgegengesetzter Weise die Wellenform beeinflussen: zum grösseren a_1 und kleineren a_2 gehören die Wellen mit runderen Köpfen, zum kleineren a_1 und grösseren a_2 die spitzeren Wellen. Hierdurch wird das oben gefundene Resultat bestätigt.

Die Angaben von Beobachtern, nach denen ein umgekehrter Einfluss stattfinden soll, sind zunächst als bedeutungslos anzusehen. Das Beobachten mit blossem Auge kann bei den vielfach zusammengesetzten Wellensystemen der freien See zu keinen sicheren Ergebnissen führen. Sehr erwünscht wären photographische Aufnahmen der Wellen bei gleichzeitiger Messung von Windstärke und Wellengeschwindigkeit. Ferner ist nicht zu übersehen, dass die gefundenen Ergebnisse für Wellen gelten, bei denen die Druckgleichheit angenähert herrscht, die sich also annähernd im Gleichgewicht befinden. Wellen, die nahe daran sind zu branden, können natürlich ein sehr verschiedenes Verhalten zeigen.

Dasselbe Ergebniss, wie oben, lässt sich auch noch dadurch gewinnen, dass man die obere und untere Flüssigkeit vertauscht. Dann sind auch $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ zu vertauschen und man erhält nun

da, wo vorher starker Wind und geringe Wellengeschwindigkeit war, jetzt schwachen Wind und grosse Wellengeschwindigkeit und umgekehrt, während die Figuren umzudrehen sind.

Die Betrachtung der Energie der Wellen ist von grosser Wichtigkeit, weil sich die Bedingung des stationären Zustandes so definiren lässt, dass bei constanten Geschwindigkeiten der Horizontalströmung die Energie des Systems ein Minimum sein muss.

Wir nennen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ die Werthe, die ψ_1 und ψ_2 an den horizontalen Grenzen haben. Da ψ_1 und ψ_2 an der Trennungslinie verschwinden sollen, so ist

$$\int \frac{\partial \psi_1}{\partial y}\, dy = \mathfrak{p}_1,$$

wenn die Integration zwischen den Grenzen genommen wird, die y an der Trennungslinie und an der horizontalen Grenze hat. Da $\frac{\partial \psi_1}{\partial y}$ die Geschwindigkeit parallel x ist, so bedeutet $\mathfrak{p}$ die Flüssigkeitsmenge, welche durch einen beliebigen Querschnitt der oberen Flüssigkeit fliesst. Dasselbe gilt für $\mathfrak{p}_2$.

Die lebendigen Kräfte haben nun die Werthe

$$\begin{aligned} 2L_1 &= s_1 \int\int dx\,dy\, \left[\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right)^2\right], \\ 2L_2 &= s_2 \int\int dx\,dy\, \left[\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y}\right)^2\right], \end{aligned} \qquad 52)$$

wo die Integrale über die von den Flüssigkeiten eingenommenen Räume zu erstrecken sind.

Die x-Axe liegt in der horizontalen Grenzlinie. Sind Wellen vorhanden, so ist die potentielle Energie durch die aus den Wellenthälern in die Wellenberge gehobenen Flüssigkeitsmengen bedingt. Da dann die Flüssigkeitsmenge über der x-Axe gleich der unter ihr fehlenden ist, so muss

$$\int_x^{x+\lambda} y dx = 0$$

sein, wo $y = f(x)$ die Gleichung der Wellenlinie ist.

Die in dem Streifen von der Breite dx und Höhe y über die Niveaufläche gehobene Wellenmenge hat die potentielle Energie

$$s_2 g dx \int_0^y y\, dy = \frac{g}{2} s_2 y^2 dx\,,$$

die gesammte potentielle Energie für eine Wellenlänge ist also

$$F = \frac{g}{2}(s_2 - s_1)\int_x^{x+\lambda} y^2 dx\,.$$

Wir bilden nun zunächst die Variation der Differenz beider Energien $F - L$ unter der Voraussetzung, dass $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ constant gehalten werde. Bei der Variation sollen verschiedene Wellenformen verglichen werden, die wir uns stetig in einander übergeführt denken. Wir denken uns das Linienelement dS der Grenzlinie um δn in der Richtung der Normalen verschoben und zwar nach der oberen, weniger dichten Flüssigkeit hin. Es ist dann

$$\delta F = g(s_2 - s_1)\int y\,\delta n\, dS. \tag{53)}$$

Die Werthe für die lebendige Kraft können wir schreiben nach Gleichung 4) Abschnitt III

$$\left.\begin{aligned} 2L_2 &= s_2\int\int dx\,dy\left[\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right)^2\right] = s_2\int dS\,\frac{\partial\psi_2}{\partial n}\,\psi_2\,,\\ 2L_1 &= s_1\int\int dx\,dy\left[\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)^2\right] = -s_1\int dS\,\frac{\partial\psi_1}{\partial n}\,\psi_1\,,\end{aligned}\right\} \tag{54)}$$

da n für Raum 2 die nach aussen, für 1 die nach innen gerichtete Normale ist. Die Integrale rechts sind über die Wellenlinie, die horizontale Begrenzung auf die Länge der Welle und zwei verticale Linien zu erstrecken.

Da nun für die unvariirte Wellenform ψ_1 und ψ_2 an der Grenze verschwindet, an den Verticalen $\frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial x}$ verschwindet, wenn wir sie in einen Wellenberg oder ein Wellenthal legen, so bleibt nur das Integral über die horizontale Grenze. Dort ist

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}\,,\quad \psi_1 = \mathfrak{p}_1\,,\quad \psi_2 = \mathfrak{p}_2\,. \tag{55)}$$

Es ist also

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= \frac{s_1}{2}\int dx\,\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\,\mathfrak{p}_1 = \frac{s_1}{2}\int_x^{x+\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathfrak{p}_1\,dx = \frac{s_1}{2}\left[\varphi(x+\lambda) - \varphi(x)\right]\mathfrak{p}_1\,,\\ \text{oder}\quad &= \pi s_1 b_1 \mathfrak{p}_1\,.\end{aligned}\right\} \tag{56)}$$

$2\pi b_1$ bedeutet den Unterschied des Geschwindigkeitspotentials für die Länge einer Welle, da $\frac{\varphi(x+\lambda)-\varphi(\lambda)}{\lambda} = a_1 = mb_1 = \frac{2\pi}{\lambda} b_1$ ist.

Ebenso findet sich

$$L_2 = \pi s_2 b_2 \mathfrak{p}_2 .$$

Die Variation der lebendigen Kraft rührt nun von der Verschiebung der Wellenlinie her, während der Werth von ψ_1, ψ_2, also auch $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ ungeändert bleibt. Dabei muss die Vorschrift festgehalten werden, dass ψ_1 und ψ_2 auch an der neuen Grenze verschwinden. Dies bedingt eine Variation des Werthes von ψ an der Wellenlinie, während $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ nun constant gehalten werden.

Die erste Aenderung ist einfach gleich der Breite des durch die Verschiebung gewonnenen oder verlorenen Streifens, an jeder Stelle multiplicirt mit dem Quadrate der resultirenden Geschwindigkeit und dem Factor $\frac{1}{2}$. Also

$$= \frac{1}{2}\int \left[s_2 \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial n}\right)^2 - s_1 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial n}\right)^2 \right] dS\, \delta n .$$

Da hier die ψ unverändert gelassen wurden, so ist an der neuen Grenze

$$\psi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial n}\, \delta n, \qquad \psi_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial n}\, \delta n .$$

Da aber ψ_1 und ψ_2 Null sein sollen, so muss ψ_1 und ψ_2 im ursprünglichen Raume so variirt werden, dass

$$\delta\psi_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial n}\, \delta n, \qquad \delta\psi_2 = -\frac{\partial \psi_2}{\partial n}\, \delta n$$

werden.

Nun ist

$$L = \frac{s}{2}\int\int dx\, dy \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 \right]$$

und die Aenderung in Folge der Variation von ψ

$$= s\int\int dx\, dy \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \delta\psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \delta\psi}{\partial y} \right),$$

oder nach partieller Integration und Berücksichtigung von $\Delta\psi = 0$ und der Richtung von n

$$-s_1\int \frac{\partial \psi_1}{\partial n}\, \delta\psi_1\, dS + s_2\int \frac{\partial \psi_2}{\partial n}\, \delta\psi_2\, dS ,$$

wenn wir an der horizontalen Grenze $\delta\mathfrak{p}_1 = \delta\mathfrak{p}_2 = 0$ annehmen.

Die gesammte Variation ist also nach Berücksichtigung der Werthe von $\delta\psi$

$$\delta L = -\tfrac{1}{2}\int\left[s_2\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial n}\right)^2 - s_1\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial n}\right)^2\right] dS\,\delta n\,.$$

Schliesslich muss noch die Bedingung erfüllt werden, dass die Menge Flüssigkeit ungeändert bleibt, also

$$\int dS\,\delta n = 0 \text{ ist.}$$

Bezeichnet c eine Constante, so ist

$$\delta\,(F - L) = -\int dS\,\delta n\left\{(s_1 - s_2)\,y + \frac{s_1}{2}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial n}\right)^2 - \frac{s_2}{2}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial n}\right)^2 + c\right\},$$

also

$$= -\int dS\,\delta n\,(p_2 - p_1)\,.$$

Es ist also

$$\delta\,(F - L) = 0, \tag{57}$$

wenn $p_2 = p_1$ ist.

Wenn $p_2 > p_1$ ist, und die Oberfläche der Druckdifferenz folgt, so ist δn positiv, und es wird $F - L$ verringert, das System nähert sich also einem naheliegenden Minimum; entfernt sich aber von einem Maximum. Es entspricht also ein Minimum des Werthes $F - L$ stabilem Gleichgewicht.

Die Werthe $\mathfrak{p}$ und b sind den mittleren Strömungsgeschwindigkeiten an den horizontalen Grenzen proportional und hängen sonst nur von der Form des von der Flüssigkeit eingenommenen Raumes ab. Es ist also

$$\mathfrak{p} = b\,\mathfrak{R}\,,$$

wenn $\mathfrak{R}$ eine Grösse bezeichnet, die nur von der Gestalt des Raumes abhängt. Nun war nach 56)

$$L = \frac{s}{2}\,\mathfrak{p}\,b = \frac{s}{2}\,b^2\mathfrak{R} = \frac{s}{2}\,\frac{\mathfrak{p}^2}{\mathfrak{R}}.$$

Wenn also $\mathfrak{R}$ eine Aenderung $\delta\mathfrak{R}$ erfährt, so wird, wenn b unverändert bleibt

$$\delta L = \frac{s}{2}\,b^2\,\delta\mathfrak{R}\,,$$

$$\delta b = 0.$$

Dagegen

$$\delta L = -\frac{s}{2}\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{R}^2}\,\delta\mathfrak{R} = -\frac{s}{2}\,b^2\,\delta\mathfrak{R}, \quad \delta\mathfrak{p} = 0.$$

Es ist also, wie wir gesehen haben,

$$\delta(F - L) = 0, \quad \delta\mathfrak{p}_1 = \delta\mathfrak{p}_2 = 0$$

und auch

$$\delta(F + L) = 0, \quad \delta b_1 = \delta b_2 = 0; \tag{58}$$

da nun $a = \frac{2\pi}{\lambda} b$ ist, so ist also auch $\delta a_1 = \delta a_2 = 0$.

Aus diesen Sätzen kann man folgenden Schluss ziehen. Wenn die Energie einer Flüssigkeitsmenge bei ebener Grenze und constant gehaltenem Werthe der Strömung an den horizontalen festen Grenzen grösser ist als beim Vorhandensein von Wellen, so ist die ebene Grenze ein Zustand labilen Gleichgewichts.

Die durch die obigen Abbildungen dargestellten Wellenformen ergeben aber einen grösseren Energievorrath als bei ebener Grenze und es erscheint zweifelhaft, ob andere Wellensysteme möglich sind.

So lange solche nicht aufgefunden sind, kann man die Entstehung der Wellen nicht einer gleichmässigen Windströmung zuschreiben, sondern muss sie auf periodischen Wechsel des Windes zurückführen.

Da sich aus diesen Betrachtungen noch andere wichtige Folgerungen ziehen lassen, so mögen sie hier noch mitgetheilt werden.

In Bezug auf das Coordinatensystem möge die obere Flüssigkeit die Horizontalströmung a_1, die untere $a_3 - a_2$ haben. Geben wir dann dem ganzen System die Geschwindigkeit a_2, so ist die absolute Geschwindigkeit

der oberen Flüssigkeit $a_1 + a_2$,
der unteren Flüssigkeit a_3,
der Wellen a_2.

Da die Geschwindigkeiten nur als Quadrate erscheinen, so kann a_1 oder $a_3 - a_2$ das Zeichen wechseln, ohne die Resultate zu beeinflussen. Dann laufen die Wellen dem Wind entgegen.

Bezeichnen wir die Entfernungen der horizontalen Grenzlinie von der x-Axe mit $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ und integriren über die Länge einer Welle, so findet sich nach 52)

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \frac{s_1}{2} \lambda \left\{ \mathfrak{p}_1 (a_1 + 2 a_2) + a_2^2 \mathfrak{H}_1 \right\}, \\
L_2 &= -\frac{s_2}{2} \lambda \left\{ \mathfrak{p}_2 (a_3 + a_2) - a_2^2 \mathfrak{H}_2 \right\}.
\end{aligned} \qquad 59)
$$

Wir setzen nun

$$
\mathfrak{p}_1 = a_1 (\mathfrak{H}_1 - r_1), \qquad - \mathfrak{p}_2 = (a_3 - a_2)(\mathfrak{H}_2 - r_2).
$$

Dann ist

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \frac{s_1}{2} \lambda \left\{ \mathfrak{H}_1 (a_1 + a_2)^2 - (a_1 + 2 a_2) a_1 r_1 \right\}, \\
L_2 &= \frac{s_2}{2} \lambda \left\{ \mathfrak{H}_2 a_3^2 - (a_3^2 - a_2^2) r_2 \right\}.
\end{aligned} \qquad 60)
$$

Die Glieder, die den Factor r enthalten, bedingen die Veränderung der lebendigen Kräfte in Folge der Wogenbildung.

Setzen wir $a_3 = 0$, so ist

$$
L_2 = \frac{s_2 \lambda}{2} a_2^2 r_2 .
$$

Da L_2 positiv ist, darf r_2 nicht negativ werden. Dasselbe gilt von r_1. Setzen wir nun $a_2 = 0$, so folgt unmittelbar, dass die lebendigen Kräfte durch die Wogenbildung verringert werden. Dies Resultat ist auch von allgemeinerem Interesse, weil es unabhängig ist von der Gestalt der Wellenlinie.

J e d e S t r ö m u n g, die auf einer Seite durch eine horizontale, auf der andern durch eine periodische Linie begrenzt ist, hat geringere lebendige Kraft, als die Strömung zwischen zwei horizontalen.

Wir können dieselben Ergebnisse durch Anwendung der Schwerpunktssätze gewinnen.

Die Geschwindigkeit des Schwerpunkts in der Richtung der horizontalen Strömung ist $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{H}}$.

Die Gesammtenergie für die obere Flüssigkeit ist

$$
\mathfrak{p}_1 a_1 \frac{s_1}{2} \lambda ,
$$

also die lebendige Kraft der Bewegung relativ zum Schwerpunkt

$$
\frac{s_1}{2} \lambda \left[\mathfrak{p}_1 a_1 - \mathfrak{H}_1 \left(\frac{\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{H}_1} \right)^2 \right].
$$

Geben wir jetzt dem Schwerpunkt die Geschwindigkeit a_2 hinzu, so ist die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung

$$\frac{s_1}{2}\lambda\left(\frac{\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{H}_1}+a_2\right)^2\mathfrak{H}_1.$$

Durch Addition beider ergiebt sich L_1.

Man sieht hieraus, dass die Bewegung des Schwerpunkts der durch die Wellen eingedämmten Strömung geringer ist als a_2, die Bewegung bei horizontaler Grenze. Durch Hinzufügen von $-a_2$ wird die Bewegung bei horizontaler Grenze für die untere Flüssigkeit aufgehoben, für die Bewegung beim Vorhandensein von Wellen bekommt der Schwerpunkt eine etwas grössere Geschwindigkeit in der Richtung $-a_2$, der Schwerpunkt der ganzen Wassermasse bewegt sich also in der Richtung der Wellen fort. Und zwar mit der Geschwindigkeit

$$\frac{a_2 r_2}{\mathfrak{H}_2}.$$

Hier würde jetzt a_2 die Geschwindigkeit der Wellen sein. Die fortschreitende Bewegung des Schwerpunkts ist bei grosser Wassertiefe, also grossen Werthen von $\mathfrak{H}_2$ klein, bei flachem Wasser kann sie aber sehr beträchtlich werden.

Wir betrachten nun den Energievorrath für die einzelnen Wellenformen.

Für die Abbildung durch elliptische Coordinaten ergiebt zunächst aus der Bedingung, dass die x-Axe in die horizontale Trennungslinie fällt

$$h=2e^{-2h}\cos^2\varepsilon+e^{-4h}\cos^2 2\varepsilon+\ldots$$

Für $\eta=y=\infty$ wird

$$\mathfrak{p}_1=a_1\left(\mathfrak{H}_1-\frac{\lambda}{2\pi}h\right),$$

also ist

$$r_1=\frac{\lambda}{2\pi}\left\{2e^{-2h}\cos^2\varepsilon+e^{-4h}\cos^2 2\varepsilon+\ldots\right\},$$

und

$$r_2=\frac{\lambda}{2\pi}\left\{2\cos^2\varepsilon\left(\frac{e^{-h}}{\cos hi}-e^{-2h}\right)+\cos^2 2\varepsilon\left(\frac{e^{-2h}}{\cos 2hi}-e^{-4h}\right)\ldots\right\}.$$

Der Werth der potentiellen Energie wird

$$F=\frac{\lambda^3 g(s_2-s_1)}{4\pi^2}\left\{e^{-2h}\cos^2\varepsilon+e^{-4h}(3\cos^4\varepsilon-3\cos^2\varepsilon+\tfrac{1}{4})\ldots\right\}.$$

Der Unterschied im Energievorrath bei ebener Grenze von dem bei ruhenden Wellen ist

$$\frac{s_1 \lambda a_1^2 r_1}{2} + \frac{s_2 \lambda a_2^2 r_2}{2} - F = D.$$

Ist D positiv, so ist die Energie bei ebener Grenze grösser. In dem betrachteten Falle ist

$$D = \frac{\lambda^2 (s_2 - s_1) g}{4\pi} \Big\{ r_1 \mathfrak{P} + r_2 \mathfrak{Q}$$

$$- \frac{\lambda}{\pi} (e^{-2h} \cos^2 \varepsilon + e^{-4h} [3(\cos^4 \varepsilon - \cos^2 \varepsilon) + \tfrac{1}{4}]) \Big\}$$

$$= \frac{g \lambda^3 (s_2 - s_1) e^{-4h}}{4\pi^2} (\cos^2 \varepsilon + 4 \cos^4 \varepsilon - 20 \cos^6 \varepsilon).$$

D ist positiv, wenn $\cos\varepsilon < 0{,}5875$ ist, sonst negativ.

Nun ist aber

$$\mathfrak{P} = \tfrac{1}{2} - \frac{1}{4\cos^2\varepsilon} - \zeta^2 \left(\cos^2\varepsilon - \tfrac{1}{4} + \frac{1}{16\cos^4\varepsilon}\right) - \frac{\zeta^4}{16\cos^4\varepsilon}\left(1 + \frac{1}{2\cos^2\varepsilon}\right).$$

$\mathfrak{P}$ darf nicht negativ werden; ζ^2 ist eine kleine Grösse, also muss

$$\cos^2\varepsilon > \tfrac{1}{2}, \quad \cos\varepsilon > 0{,}7071$$

sein.

Es ist also D bei diesen Wellen immer negativ, der Energievorrath grösser als bei ebener Grenze.

Der Unterschied tritt erst bei Berücksichtigung von Gliedern von der Ordnung e^{-2h} auf.

Bei der Abbildung durch elliptische Functionen ist bei der oben benutzten Annäherung

$$\mathfrak{p}_1 = a_1 \mathfrak{H}_1 - \left\{\log \frac{\sqrt{k_1} K_1}{k K} + \log c_0\right\} b_1$$

$$\log c_0 = -h - \log \frac{\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}} + (e^{-4h} - q^2 e^{4h}) + \tfrac{1}{2}(e^{-8h} - q^4 e^{8h})$$

$$- \mathfrak{p}_2 = - a_2 \mathfrak{H}_2 - \left[\log \frac{K_2 \sqrt{k_2}}{K} - \log c_0\right] b_2$$

also

$$r_1 = \frac{\lambda}{\pi} \left\{\log \frac{\sqrt{k_1} K_1}{k K} + \log c_0\right\}$$

$$r_2 = \frac{\lambda}{\pi} \left\{\log \frac{\sqrt{k_2} K_2}{K} - \log c_0\right\}.$$

Nun ist

$$K = \frac{\pi}{2}\left\{1 + 2q + 2q^4 \dots\right\}^2.$$

Vernachlässigt man höhere Glieder, so ist

$$\frac{k^2}{q} = 16 - 128q + 704q^2, \qquad \log\frac{k^2}{q} = 4\log 2 - 8q + 12q^2$$

und

$$r_1 = \frac{\lambda}{\pi}\left[(e^{-2h} - qe^{2h})^2 + \tfrac{1}{2}(e^{-8h} - 3q^4e^{8h} + 2q^2)\right]$$

$$r_2 = \frac{\lambda}{\pi}\left[(e^{-2h} - qe^{2h})^2 + \tfrac{1}{2}(q^4e^{8h} - 3e^{-8h} + 2q^2)\right].$$

Die potentielle Energie ist

$$F = \frac{g(s_2 - s_1)\lambda^3}{4\pi^2}\left[(e^{-2h} - qe^{2h})^2 + \tfrac{1}{4}(e^{-4h} - q^2e^{4h})^2 - 2q(e^{-2h} - qe^{2h})^2\right].$$

Setzen wir $qe^{4h} = \varepsilon$, so ist

$$D = \frac{\lambda^3 g(s_2 - s_1)e^{-8h}}{16\pi^2}\left\{\frac{-21(1-\varepsilon^5) + 14(\varepsilon^2 - \varepsilon^3) + 25(\varepsilon - \varepsilon^4)}{1 - \varepsilon - 8e^{-4h}(\varepsilon - \varepsilon^2)}\right\}.$$

Wir haben in erster Annäherung

$$2(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}) = 1, \qquad 2\mathfrak{P} = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\varepsilon}{\varepsilon - 1}.$$

Da weder $\mathfrak{P}$ noch $\mathfrak{Q}$ negativ werden dürfen, so kann ε nicht in die Nähe des Werthes 1 gelangen, wenn es kleiner als 1 bleibt.

Ist ε klein, so wird D negativ.

Ist $\varepsilon = 1$, so ist die Oberfläche horizontal, da $q = q_1 = q_2$, $\frac{\psi_1}{b_1} = \frac{\psi_2}{b} = my + \text{const}$ werden.

Ist ε grösser als 1, so wird, wenn wir $\varepsilon = 1 + \delta$ setzen,

$$D = -\frac{\lambda^3 g(s_2 - s_1)e^{-8h}}{16\pi^2}\left(\frac{21\delta^4 + 80\delta^3 + 96\delta^2 + 32\delta + 16}{1 - 8e^{-4h}(1+\delta)}\right).$$

Für kleine Werthe von δ ist D negativ. Für grosse müssen wir auf die Gleichungen 33) zurückgehen. Danach ist

$$2(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}) = \frac{-1 + 12q + 4e^{-4h}(3 + 3\delta + \delta^2)}{-1 + 8e^{-4h}(1+\delta)}$$

$$2\mathfrak{Q} = (\tfrac{3}{4} - 2\mathfrak{P})(1 + \delta) + \tfrac{3}{4},$$

also

$$2\mathfrak{P} = -\left(\frac{-1+12q+4e^{-4h}(3+3\delta+\delta^2)}{-1+8e^{-4h}(1+\delta)} - \tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{4}\delta\right)\frac{1}{\delta}$$

oder

$$2\mathfrak{P} = -\frac{1}{\delta}\left(\frac{\frac{5}{2}+\frac{3}{4}\delta+e^{-4h}(12+6\delta-2\delta^2)}{-1+8(1+\delta)e^{-4h}}\right).$$

Für grosse Werthe von δ könnte D positiv werden, wenn

$$e^{-4h}(1+\delta) = q > \tfrac{1}{8} \text{ ist.}$$

Wenn aber $q > \frac{1}{8}$ ist, so kann δ nicht so gross werden, dass der Zähler in dem Werthe von $\mathfrak{P}$ negativ würde, weil dann der Werth von $(qe^{2h})^3 = [(1+\delta)e^{-2h}]^3$ oder von e^{-6h} nicht mehr vernachlässigt werden darf. Dann würde zunächst $\mathfrak{P}$ negativ werden, was unzulässig ist. Es sind also auch hier nur die negativen Werthe von D zulässig.

Ist q und damit ε negativ, so ist, wenn wir jetzt $-\varepsilon = 1+\delta$ setzen

$$2\mathfrak{P}(2+\delta) = \frac{2+\frac{5}{2}\delta+\frac{3}{4}\delta^2+e^{-4h}(16+36\delta+18\delta^2+2\delta^3)}{2+\delta+8e^{-4h}(2+3\delta+\delta^2)}$$

und

$$D = -\frac{\lambda^3 g(s_2-s_1)e^{-8h}}{16\pi^2}\left\{\frac{50+21\delta^5+130\delta^4+296\delta^3+304\delta^2+160\delta}{2+\delta+8e^{-4h}(2+3\delta+\delta^2)}\right\}.$$

Für positive Werthe von δ ist daher D immer negativ. Ist δ negativ, so kann es höchstens gleich -1 werden. Dann müsste, wenn D positiv werden sollte, der Zähler in der Klammer negativ sein. Dies ist aber für keinen Werth von $-\delta$, der unter 1 liegt, der Fall.

Für den Fall endlicher Entfernung der einen Strömungslinie erhalten wir aus 37) und 37a)

$$r_1 = \frac{\lambda}{\pi}e^{-4h}\left[1-\varepsilon^2+\tfrac{1}{2}e^{-4h}(1-\varepsilon^4)\right]$$

$$r_2 = \frac{\lambda}{\pi}e^{-4h}\left[(1-\varepsilon)^2+\tfrac{1}{2}e^{-4h}(\varepsilon^4-3+2\varepsilon^2)\right],$$

c_0 und die potentielle Energie haben denselben Werth wie im letzten Fall.

Daher ergiebt sich

$$D = \frac{e^{-8h}\lambda^3 g(s_2-s_1)}{16\pi^2}\left(\frac{-21-28\varepsilon+58\varepsilon^2+16\varepsilon^3+12\varepsilon^5-37\varepsilon^4}{1+\varepsilon}\right).$$

ε darf nicht grösser als 1 werden, weil sonst die horizontale Strömungslinie die Wellenlinie schneidet. Negative Werthe von ε sind hier ausgeschlossen. Für $\varepsilon < 1$ bleibt D negativ.

In allen betrachteten Fällen hat daher die Wellenbildung die Energie vergrössert, allerdings in sehr geringem Grade und erst bei höheren Wellen bemerkbar.

Wenn wir das Vorzeichen von g umkehren, haben wir den Index 1 und 2 zu vertauschen. Wir ziehen noch einige Schlüsse für Wellen auf flachem Wasser. Vgl. S. 178.

In erster Annäherung ist dann

$$\mathfrak{H}_2 = \frac{\lambda}{4\pi} \log \frac{1}{\varepsilon}$$

und nach 37a) für höhere Wellen

$$2\mathfrak{P} = \tfrac{3}{4}\left(1 + e^{-\frac{4\pi\mathfrak{H}_2}{\lambda}}\right).$$

Es gehören hier zu einer bestimmten Wellenlänge ein bestimmtes $\mathfrak{P}$, also auch bestimmte Luftströmung.

Wird die Wellentiefe klein gegen λ, so ist $e^{-\frac{4\pi\mathfrak{H}_2}{\lambda}}$ nicht mehr gegen 1 zu vernachlässigen. Bei geringerer Wassertiefe ist $\mathfrak{P}$ grösser, also die Luftströmung grösser, wenn λ unverändert bleibt.

Die Geschwindigkeit des Schwerpunkts des Wassers ist, wie wir gesehen haben, $\frac{\mathfrak{p}_2}{\mathfrak{H}_2}$. Nehmen wir die Strömung an der horizontalen Bodenebene gleich Null an, so ist bei fortschreitenden Wellen dem Schwerpunkt die Geschwindigkeit $-a_2$ zu ertheilen, es bleibt ihm dann noch die Geschwindigkeit

$$\frac{a_2 r_2}{\mathfrak{H}_2} = \frac{a_2 e^{-4h}\left[1 - \varepsilon^2 + \frac{1}{2} e^{-4h}(1 - \varepsilon^4)\right]}{\frac{1}{4}\log\frac{1}{\varepsilon} + e^{-4h}(1 - \varepsilon^2) + \frac{1}{2} e^{-8h}(1 - \varepsilon^4)}$$

in der Richtung der Wellen.

Bleibt der Schwerpunkt in Ruhe, wie man es bei den Verhältnissen, die bei den Wasserwellen vorkommen, als wahrscheinlich betrachten muss, so hat das Wasser an der horizontalen Grundfläche eine mittlere Geschwindigkeit $\frac{a_2 r_2}{\mathfrak{H}_2}$ den Wellen entgegen und die Wellengeschwindigkeit ist $a_2\left(1 - \frac{r_2}{\mathfrak{H}_2}\right)$, die des Windes $a_1 + a_2\left(1 - \frac{r_2}{\mathfrak{H}_2}\right)$.

Aus 37a) erhalten wir in erster Näherung

$$2\mathfrak{Q}\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}+2\mathfrak{P}=1,$$

$$\mathfrak{H}_2=\frac{\lambda}{\pi}\frac{1}{4}\log\frac{1}{\varepsilon}.$$

Bei dieser ersten Näherung fallen alle typischen Unterschiede der Wellenform fort. Es sind dieselben niedrigen Wellen wie im § 1 nur mit Berücksichtigung des Windes und endlicher Tiefe.

Setzen wir

$$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}=\gamma,$$

so haben wir

$$a_2^2 s_2\gamma+a_1^2 s_1=(s_2-s_1)\frac{g\lambda}{2\pi}.$$

Nun ist die absolute Windstärke $w=a_1\mp a_2$, je nachdem die Wellen entgegen oder mit dem Winde fortschreiten.

Dann ist

$$a_2=\frac{w\frac{s_1}{s_2}\mp\sqrt{\left(1-\frac{s_1}{s_2}\right)\frac{g\lambda}{2\pi}\left(\frac{s_1}{s_2}+\gamma\right)-w^2\gamma\frac{s_1}{s_2}}}{\frac{s_1}{s_2}+\gamma}, \qquad 61)$$

ist $w=0$, d. h. ruht die Luft ganz, so ist

$$\mathfrak{a}_2=\sqrt{\frac{\left(\frac{s_2}{s_1}-1\right)\frac{g\lambda}{2\pi}}{1+\gamma\frac{s_2}{s_1}}}.$$

Es wird also

$$a_2=\frac{w\frac{s_1}{s_2}}{\frac{s_1}{s_2}+\gamma}\mp\sqrt{\mathfrak{a}_2^2-\frac{w^2\gamma\frac{s_1}{s_2}}{\left(\frac{s_1}{s_2}+\gamma\right)^2}}.$$

Wenn der Wind den Wellen entgegenströmt, d. h. beim oberen Vorzeichen im Werthe a_2, wird a_2 stets kleiner als $\mathfrak{a}_2$; dann verringert also der Wind die Wellengeschwindigkeit.

w darf nicht grösser sein als

$$\frac{\mathfrak{a}_2\left(\frac{s_1}{s_2}+\gamma\right)}{\sqrt{\gamma\frac{s_1}{s_2}}},$$

wenn die Wellen noch stabil sein sollen. Ist $w = 2\mathfrak{a}_2$, so ist $\mathfrak{a}_2 = a_2$, wenn der Wind mit den Wellen läuft, d. h. es ist von gleichem Einfluss, ob die Wellen mit der Geschwindigkeit a_2 der Luft vorauseilen, oder um ebensoviel zurückbleiben.

Ist der Wind stärker als dieser kritische Werth, so ist die Geschwindigkeit der Wellen kleiner, im entgegengesetzten Fall grösser als bei ruhender Luft. Ist

$$w > \mathfrak{a}_2\sqrt{1+\gamma\frac{s_2}{s_1}},$$

so kann a_2 nicht mehr negativ werden und es existiren keine Wellen von der vorgeschriebenen Wellenlänge, die gegen den Wind laufen. Ist die Wassertiefe klein gegen die Wellenlänge, so ist $\gamma = \infty$

$$a_2 = \mp\sqrt{\mathfrak{a}_2^2 - \frac{w^2}{\gamma}\frac{s_1}{s_2}} = \mp\sqrt{\mathfrak{H}_2 g\left[1-\frac{s_1}{s_2}\left(1+w^2\frac{2\pi}{\lambda g}\right)\right]}.$$

Die Wellengeschwindigkeit ist hier dieselbe, ob der Wind gegen die Wellen oder mit ihnen läuft; sie wird in beiden Fällen durch den Wind verringert. Hier muss

$$w < \sqrt{\frac{\left(1-\frac{s_1}{s_2}\right)\frac{\lambda g}{2\pi}}{\frac{s_1}{s_2}}} \quad \text{sein.}$$

Setzen wir die Dichtigkeit der Luft $s_1 = 0$, so wird

$$a_2 = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi\gamma}}.$$

Setzt man für γ seinen Werth

$$\frac{e^{\frac{2\pi\mathfrak{H}_2}{\lambda}} + e^{-\frac{2\pi\mathfrak{H}_2}{\lambda}}}{e^{\frac{2\pi\mathfrak{H}_2}{\lambda}} - e^{-\frac{2\pi\mathfrak{H}_2}{\lambda}}}$$

ein, so stimmt der Werth von a_2 mit dem aus der gewöhnlichen

Theorie abgeleiteten überein, wo von dem Einflusse der Luft abgesehen wird.

Ferner ist in diesem Fall

$$a_2 = \sqrt{g \mathfrak{H}_2},$$

wenn die Wellenlänge gross gegen $\mathfrak{H}_2$ ist, dagegen

$$a_2 = \mathfrak{a}_2 = \sqrt{\left(1 - \frac{s_1}{s_2}\right) \mathfrak{H}_2 g},$$

wenn s_1 von Null verschieden und $w = 0$ ist. Also bewegen sich niedrige Wellen auf ganz flachem Wasser etwas langsamer in ruhender Luft als wenn die Luft nicht vorhanden wäre.

§ 2.

Näherungsmethode für die Theorie der Wellen an der Oberfläche einer Flüssigkeit.

Lord Rayleigh hat einen andern Weg der näherungsweisen Berechnung eingeschlagen. Es seien A, a, m Constanten und

$$\varphi + i\psi = a(x + iy) - iAe^{im(x+iy)}, \tag{62}$$

also

$$\psi = ay - Ae^{-my} \cos mx. \tag{63}$$

Für grosse Tiefen, wo $y = \infty$ ist, haben wir eine horizontale Strömung von der Geschwindigkeit a. Für u und v ergiebt sich

$$u = a + Ame^{-my} \cos mx, \quad u^2 + v^2 = a^2 + 2aAme^{-my} \cos mx + m^2A^2e^{-2my}$$

$$v = -Ame^{-my} \sin mx, \quad = a^2 + 2am(ay - \psi) + m^2A^2e^{-2my},$$

also ist an der Oberfläche

$$\frac{p}{s} = \text{const} + gy - \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2) = C + (g - a^2m)y + am\psi - \tfrac{1}{2}m^2A^2e^{-2my}. \tag{64}$$

Da ψ in der Oberfläche constant sein muss, so folgt, dass bei Vernachlässigung von A^2, $g = a^2m$, $a = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$ sein muss.

Dies kann als erste Näherung gelten.

Wir setzen nun ψ als constant voraus und berechnen aus 63) y als Funktion von x durch stufenweise Näherung.

Die erste Näherung würde geben, wenn e^{-my} nach Potenzen entwickelt wird,

$$y = \frac{\frac{A}{a}\cos mx + \frac{\psi}{a}}{1 + \frac{Am}{a}\cos mx} = \left(\frac{A}{a}\cos mx + \frac{\psi}{a}\right)\left(1 - \frac{Am}{a}\cos mx + \frac{A^2m^2}{a^2}\cos^2 mx\right),$$

indem wir die höheren Potenzen vernachlässigen.

Den zweiten Näherungswerth berechnen wir aus der Formel

$$\psi = ay - A\left(1 - my + \frac{m^2y^2}{2}\right)\cos mx.$$

Berücksichtigen wir auch hier nur Glieder von der Ordnung A^2 im Vergleich zur Einheit und wählen den constanten Werth von ψ so, dass für $mx = m\pi$ die Grösse y verschwindet, nämlich $\psi = \frac{A^2m}{2a}$, so wird, wenn wir nach der Methode der unbestimmten Coefficienten $y = \mathfrak{A}_1 \cos mx + \mathfrak{A}_2 \cos 2mx + \mathfrak{A}_3 \cos 3mx$ bilden,

$$y = \frac{A}{a}\left(1 + \tfrac{5}{8}\frac{m^2A^2}{a^2}\right)\cos mx - \frac{mA^2}{2a^2}\cos 2mx + \tfrac{3}{8}\frac{m^2A^3}{a^3}\cos 3mx. \qquad 65)$$

Für a ist die nächste Näherung zu erhalten, wenn wir in der Gleichung 64) die Exponentialfunction entwickeln und die quadratischen und höheren Glieder vernachlässigen. Dann ist

$$\frac{p}{s} = \text{const} + (g - ma^2 + m^3A^2)\,y,$$

p ist constant, wenn

$$a^2 = \frac{g}{m} + m^2A^2$$

ist. Nun ist $m = \frac{2\pi}{\lambda}$, also

$$a = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}A^2}. \qquad 66)$$

Aendert man den Werth von A, so ändert man den Werth von a und nach 65) die Wellenform. Auch hierdurch lässt sich also der Einfluss der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen auf ihre Form ableiten, doch ist der wesentliche Einfluss des Windes ausser Betracht geblieben.

§ 3.

Einfluss von Ungleichmässigkeiten eines Strombettes auf die Gestalt der Oberfläche.

Wir untersuchen jetzt den Einfluss von Ungleichmässigkeit der Grundfläche auf die Oberflächengestalt eines constant fliessenden Stromes.

Sei

$$y = -h + \mathfrak{A} \cos mx \tag{67}$$

die Gleichung der Grundfläche, und $y = 0$ die horizontale Wasseroberfläche.

Die Gleichung der gestörten Oberfläche setzen wir

$$y = \mathfrak{B} \cos mx. \tag{68}$$

Ferner sei a die mittlere horizontale Geschwindigkeit des Stromes. Wir nehmen wieder $\mathfrak{A}$ und daher auch $\mathfrak{B}$ als klein an.

Dann ist

$$\varphi + \psi i = a(x+iy) - [iA(e^{m(y-ix)} - e^{-m(y-ix)}) + iB(e^{m(y-ix)} + e^{-m(y-ix)})]$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi = ax - [A(e^{my} + e^{-my}) + B(e^{my} - e^{-my})] \sin mx, \\ \psi = ay - [A(e^{my} - e^{-my}) + B(e^{my} + e^{-my})] \cos mx. \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Die Bedingung an der Oberfläche ist $\psi = 0$ für $y = \mathfrak{B} \cos mx$, und an der Grundfläche $\psi = \text{const}$ für $y = -h + \mathfrak{A} \cos mx$. Die letzte giebt

$$a\mathfrak{A} = -A(e^{mh} - e^{-mh}) + B(e^{mh} + e^{-mh}). \tag{70}$$

Die erste

$$a\mathfrak{B} = 2B.$$

Der Druck ist

$$p = \text{const} - gy + ma[A(e^{my} + e^{-my}) + B(e^{my} - e^{-my})] \cos mx. \tag{71}$$

An der freien Oberfläche soll $p = \text{const}$ sein. Daraus folgt

$$g\mathfrak{B} = 2maA. \tag{71}$$

Nun ist $\mathfrak{B} = \frac{2B}{a}$ und aus der Gleichung 70) ergiebt sich

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}}{\frac{e^{mh} + e^{-mh}}{2} - \frac{(e^{mh} - e^{-mh})}{2} \frac{g}{a^2 m}}. \tag{72}$$

Wenn also das Strombett periodisch steigt und fällt, so erhalten wir auch eine wellenförmige Oberfläche. Die Wellenhöhe an der Oberfläche verhält sich zur Wellenhöhe der Bodenlinie wie

$$\frac{a^2}{\frac{e^{mh}+e^{-mh}}{2}(a^2-a_2^2)},$$

wo a_2 die Wellengeschwindigkeit ist, die bei gleichmässiger Tiefe h und der Wellenlänge der Bodenlinie auftreten würde (vgl. S. 198). Wenn also die Geschwindigkeit der Strömung über die wellenförmige Bodenlinie dieser Wellengeschwindigkeit gleich ist, so wird die Höhe der Oberflächenwellen unendlich. Für höhere Wellen ist unsere Lösung nicht anwendbar und man wird daher für diesen Fall Brandung der Wellen vorauszusetzen haben.

Die Lösung ist auch anwendbar, wenn wir beliebige Gestaltung der Bodenlinie voraussetzen. Dann ist die Gleichung der Bodenlinie nach der Fourier'schen Reihe zu zerlegen. Ist diese Gleichung

$$y = -h + \mathfrak{A} f(x),$$

so haben wir

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dm \int_{-\infty}^\infty f(k) \cos m(x-k)\, dk$$

und die Gleichung der Oberfläche ist

$$y = \frac{\mathfrak{A}}{\pi}\int_0^\infty dm \int_{-\infty}^\infty \frac{f(k)\cos m(x-k)\, dk}{\frac{e^{mh}+e^{-mh}}{2} - \frac{g}{a^2 m}\left(\frac{e^{mh}-e^{-mh}}{2}\right)}. \qquad 73)$$

Wir wollen diese Gleichung auf den Fall anwenden, dass

$$f(x) = \operatorname{arctg} \varepsilon x \text{ ist.}$$

Da $\operatorname{arctg} \varepsilon x = -\operatorname{arctg}(-\varepsilon x)$ ist, so können wir setzen

$$y = \frac{2\mathfrak{A}}{\pi}\int_0^\infty dm \sin mx \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \varepsilon k \sin mk\, dk}{\frac{e^{mh}+e^{-mh}}{2} - \frac{g}{a^2 m}\frac{e^{mh}+e^{-mh}}{2}}.$$

Schreiben wir

$$U = \int_0^\infty \operatorname{arctg} \varepsilon k \sin mk\, dk\,,$$

so ist

$$\frac{dU}{d\varepsilon} = \int_0^\infty \frac{k \sin mk\, dk}{1 + \varepsilon^2 k^2} = \frac{\pi}{2\varepsilon^2} e^{-\frac{m}{\varepsilon}},$$

also ist

$$U = \frac{\pi}{2m} e^{-\frac{m}{\varepsilon}}$$

und

$$y = \mathfrak{A} \int_0^\infty \frac{\sin mx\, e^{-\frac{m}{\varepsilon}} dm}{m \frac{e^{mh} + e^{-mh}}{2} - \frac{g}{a^2} \frac{e^{mh} - e^{-mh}}{2}}.$$

Setzen wir $h^2 m^2 = -\Theta^2$, so ist der Nenner des Bruches unter dem Integralzeichen

$$mW = m\left(\cos\Theta - \frac{gh}{\Theta a^2} \sin\Theta\right). \tag{74}$$

Setzen wir diesen Ausdruck gleich Null, so hat er nur reelle Wurzeln, so lange $a > \sqrt{gh}$ bleibt. Wenn $a < \sqrt{gh}$ ist, so ist die Wurzel im ersten Quadranten imaginär, die anderen bleiben reell. Bezeichnen wir diese Wurzeln der Reihe nach mit Θ_1, $\Theta_2, \ldots \Theta_n \ldots$, so ist

$$\frac{W}{\left(1 - \frac{gh}{a^2}\right)} = \left(1 - \frac{\Theta^2}{\Theta_1^2}\right)\left(1 - \frac{\Theta^2}{\Theta_2^2}\right)\left(1 - \frac{\Theta^2}{\Theta_3^2}\right) \cdot \ldots$$

Beide Ausdrücke für W werden für verschwindendes Θ

$$= 1 - \frac{gh}{a^2}.$$

Wir zerlegen nun $\frac{1}{W}$ in Partialbrüche

$$\frac{\left(1 - \frac{gh}{a^2}\right)}{W} = \frac{N_1}{1 + \frac{h^2 m^2}{\Theta_1^2}} + \frac{N_2}{1 + \frac{h^2 m^2}{\Theta_2^2}} + \cdots$$

Dann ist

$$N_n = -\frac{2\left(1 - \frac{gh}{a^2}\right)}{\Theta_n \frac{\partial W}{\partial \Theta}\,(\Theta = \Theta_n)} = \frac{2\left(1 - \frac{gh}{a^2}\right)\cos\Theta_n}{\frac{gh}{a^2} - \cos^2\Theta_n} = \frac{2\left(1 - \frac{gh}{a^2}\right)\sin\Theta_n}{\Theta_n\left(1 - \frac{a^2}{gh}\cos\Theta_n\right)}.$$

Wir haben dann, wenn wir $u = hm$ schreiben,

$$y = 2\mathfrak{A}\sum_n b_n \int_0^\infty \frac{\sin\frac{xu}{h}\, e^{-\frac{u}{h\varepsilon}}\, du}{u\left(1+\frac{u^2}{\Theta_n{}^2}\right)}, \qquad b_n = \frac{\cos\Theta_n}{\frac{gh}{a^2} - \cos^2\Theta_n},$$

$$= -\frac{\sin\Theta_n}{\Theta_n\left(\frac{a^2}{gh}\cos^2\Theta_n - 1\right)}. \qquad 75)$$

Wir setzen nun $\varepsilon = \infty$; dann besteht das Strombett aus zwei parallelen Horizontalen, die für $x = 0$ in senkrechtem Abfall zusammenhängen, dessen Höhe $\pi\mathfrak{A}$ ist.

Zunächst ist

$$\int_0^\infty \frac{\cos\frac{xu}{h}\, du}{1+\frac{u^2}{\Theta_n{}^2}} = \frac{\pi}{2}\,\Theta_n\, e^{\mp\frac{x}{h}\Theta_n}. \qquad 76)$$

Daraus folgt, wie sich leicht durch Differenziren nach x verificiren lässt,

$$y = \mp\mathfrak{A}\pi\sum b_n e^{\mp\frac{x}{h}\Theta_n}.$$

Das obere Zeichen gilt für positive x, das untere für negative.

Wir haben es hier mit einer Störung an der horizontalen Oberfläche zu thun, die nur in der Nähe des Abfalls der Bodenlinie merklich ist.

Wenn $a^2 < gh$ ist, so ist $i\Theta_1$ reell. Dann haben wir das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos\frac{xu}{h}\, du}{1-\frac{u^2}{\Theta_1^2}} = \frac{\pi}{2}\,\Theta_1 \sin\frac{x}{h}\,\Theta_1 \qquad \text{für positive } x,$$

$$= 0 \qquad \text{für negative } x.$$

Wir können für b_n schreiben

$$b_n = -\frac{\Theta}{\sin\Theta}\,\frac{1}{\frac{gh}{a^2}\left(1-\frac{gh}{a^2}\right) - \Theta^2}$$

und erhalten

$$y = \frac{2\mathfrak{A}\pi\Theta_1}{e^{\Theta_1} - e^{-\Theta_1}} \frac{1}{\frac{gh}{a^2}\left(1 - \frac{gh}{a^2}\right) + \Theta_1^2} \cos\frac{x}{h}\Theta_1 - \mathfrak{A}\pi\sum_{h=2}^{\infty} b_n e^{-\frac{x}{h}\Theta_n} \qquad x > 0,$$

77)

$$y = \mathfrak{A}\pi\sum_{n=2}^{\infty} b_n e^{\frac{x}{h}\Theta_n} \qquad x < 0.$$

Fig. 13.

Es folgt hieraus, dass die Oberfläche der Flüssigkeit für $x = 0$ unstetig wird. Die physikalischen Voraussetzungen sind nicht mehr erfüllt, es muss Brandung eintreten.

In Fig. 13 ist die Linie der Oberfläche für folgendes Beispiel gezeichnet.

$$\frac{a^2}{gh} = 1{,}25, \qquad h = 5 \text{ m}, \quad a = 7{,}83 \text{ m/sec}$$

wobei sich ergeben

		für	$\frac{y}{\mathfrak{A}\pi}$
$\Theta_1 = 0{,}759$	$b_1 = 2{,}648$	$x = 0$	2,46
$\Theta_2 = 4{,}538$	$b_2 = -0{,}225$	$x = 1$	2,23
$\Theta_3 = 7{,}751$	$b_3 = 0{,}130$	$x = 2{,}5$	1,79
$\Theta_4 = 10{,}922$	$b_4 = -0{,}092$	$x = 5$	1,24
		$x = 10$	0,58
		$x = 20$	0,127

Die Höhe des Abfalls im Strombett beträgt bei der Zeichnung $\mathfrak{A}\pi = 0{,}5$ m.

Man sieht aus der Figur, dass durch Auflaufen der Strömung auf eine scharfe Erhöhung des Strombettes die Oberfläche zerrissen wird, so dass Ueberstürzen des Wassers erfolgen muss.

In diesem Beispiel war $a^2 > gh$; hier findet nur einfache Brandung ohne Bildung stehender Wellen statt. Wir betrachten nur ein zweites Beispiel, wo $a^2 < gh$ ist.

Die mittlere Tiefe ist wieder $h = 5\,m$, und der Abfall im

Strombett $\mathfrak{A}\pi = 0{,}5$ m. Ferner ist $\frac{a^2}{gh} = 0{,}8$. Für die erste Wurzel der Gleichung ist $\Theta = i\Theta_1$ zu setzen, für die anderen $\Theta = \Theta_2$ u. s. w.

Dabei ist

$$\Theta_1 = 0{,}887 \qquad b_2 = -0{,}2308$$
$$\Theta_2 = 4{,}437 \qquad b_3 = 0{,}165$$
$$\Theta_3 = 7{,}693 \qquad b_4 = -0{,}092$$
$$\Theta_4 = 10{,}881 \qquad b_5 = 0{,}041$$

Hieraus folgt

für	$\frac{y}{\mathfrak{A}\pi}$	für	$\frac{y}{\mathfrak{A}\pi}$
$x = -0$	$-0{,}117$	$x = +0$	1,467
$x = -1$	$-0{,}068$	$x = 1$	1,421
$x = -2{,}5$	$-0{,}022$	$x = 2{,}5$	1,283
$x = -5$	$-0{,}004$	$x = 5$	0,892
		$x = 7{,}5$	0,335
		$x = 8{,}85$	0
		$x = 10$	$-0{,}284$
		$x = 17{,}71$	$-1{,}409$
		$x = 20$	$-1{,}294$
		$x = 26{,}56$	0

Fig. 14.

Hier tritt also Brandung ein, indem ein Ueberstürzen nach rückwärts nothwendig wird; gleichzeitig entsteht in der Richtung des Stromes ein System stehender Wellen, deren Wellenlänge $\frac{2\pi h}{\Theta_1}$ ist.

Die erste Art der Brandung ohne stehende Wellen wird bei mässig schnell fliessenden Strömen nur in ziemlich flachem Wasser auftreten können. Bei langsamerem Fliessen und tieferem Wasser wird immer die Bildung stehender Wellen hinter der Brandungsstelle eintreten.

Wie bei allen diesen Problemen, wo der Druck an der freien Oberfläche die Bewegungsform bestimmt, hat die Richtung der

Strömung keinen Einfluss. Es wird jedoch durch diese letzten Lösungen ein Wellenzug dargestellt, der an der Abfallstelle des Bodens beginnt. In Wirklichkeit wird der Wellenzug immer in der Richtung mit dem Strom verlaufen, weil ein stromauf gehender Wellenzug eine anderweitige Erregung voraussetzen würde.

Haben wir es mit einer einzelnen Unebenheit des Flussbettes von sehr kleiner Ausdehnung zu thun, so ist

$$\mathfrak{A}\int_{-\infty}^{\infty} f(k)\, dk = Q$$

die Fläche, die von dem Profil der Unebenheit eingeschlossen wird und $\cos m\,(x - k) = \cos mx$.

Wir haben also dann

$$y = \frac{Q}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{dm \cos mx}{\frac{e^{mh} + e^{-mh}}{2} - \frac{g}{a^2 m}\,\frac{(e^{mh} - e^{-mh})}{2}}.$$

Nach derselben Methode ergiebt sich wie vorher

$$y = \frac{2Q}{\pi h}\sum_n b_n \int_0^{\infty} \frac{\cos \frac{xu}{h}\, du}{1 + \frac{u^2}{\Theta_n^2}}$$

$$= \frac{Q}{h}\Sigma\, b_n\, \Theta_n\, e^{\mp \frac{x}{h}\Theta_n} \quad \text{für } a^2 > gh \qquad 78)$$

und

$$y = -\frac{2Q}{(e^{\Theta_1} - e^{-\Theta_1})}\,\frac{\Theta_1^2}{h\left(1 - \frac{gh}{a^2}\right)\frac{gh}{a^2} + \Theta_1^2}\sin\frac{x}{h}\Theta_1 + \frac{Q}{h}\sum_2 b_n\,\Theta_n\, e^{+\frac{x}{h}\Theta_n}$$

$$\text{für } a^2 < gh \text{ und } x \text{ positiv}, \qquad 79)$$

$$y = \frac{Q}{h}\sum_2 b_n\, \Theta_n\, e^{+\frac{x}{h}\Theta_n} \quad \text{für negative } x.$$

Wir haben also hier ein ganz ähnliches Resultat, wie bei plötzlicher Aenderung der Tiefe. Bei grosser Geschwindigkeit ist auch hier eine Unebenheit der Oberfläche in der Nähe der Unebenheit des Bettes, bei kleiner Geschwindigkeit ein einseitiger

Wellenzug. Doch verläuft hier die Oberfläche stetig und für $a^2 > gh$ symmetrisch zur y-Axe.

In ganz analoger Weise lässt sich das Problem behandeln, den Einfluss zu bestimmen, der von Druckkräften, die an einer Stelle der Oberfläche eines Stromes, dessen Geschwindigkeit a ist, angreifen, auf die Form der Oberfläche ausgeübt wird. Ausserdem sollen noch Widerstandskräfte auf die ganze Oberfläche wirken. Diese Kräfte sollen proportional den Geschwindigkeiten angenommen werden.

Wir setzen

$$X = -c(u-a), \quad Y = -g - cv, \quad Z = -cw. \qquad 80)$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichungen 27 b) Abschnitt I, wenn $k = \Theta = 0$ ist, so fallen sie heraus, wenn in der Flüssigkeit keine Rotation, wie aus der Bildung der Ausdrücke 4) Abschnitt II folgt, vorhanden ist. Die Flüssigkeit nimmt unter dem Einfluss dieser Kräfte daher auch im Laufe der Zeit keine Rotationsbewegung an. Wir haben also ein Geschwindigkeitspotential φ.

Wir erhalten für den Druck

$$\frac{p}{s} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - gy + c(ax - \varphi) - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right].$$

Nun sei

$$\varphi + i\psi = a(x+iy) - iAe^{-im(x+iy)},$$

also

$$\varphi = ax - Ae^{my}\sin mx,$$

$$\psi = ay - Ae^{my}\cos mx;$$

A ist wieder sehr klein, und bei Vernachlässigung der Quadrate der Geschwindigkeiten wird

$$\frac{p}{s} = C - gy + Ae^{my}(c \sin mx + am \cos mx).$$

Setzen wir für die Oberfläche $\psi = 0$, so ist dort der Druck

$$\frac{p}{s} = C + A\left[c \sin mx + \left(am - \frac{g}{a}\right)\cos mx\right].$$

Dieser Druck entspricht also einer Oberfläche von der Form

$$y = \frac{A}{a}\cos mx.$$

Daher entspricht einem Druck

$$\frac{p}{s} = C + A e^{imx} \left[\left(am - \frac{g}{a}\right) - ci\right]$$

eine Oberfläche

$$y = \frac{A}{a} e^{imx}$$

und einem Druck

$$\frac{p}{s} = C + b e^{imx}$$

eine Oberfläche

$$y = \frac{b A e^{imx}}{a\left[\left(am - \frac{g}{a}\right) - ci\right]}$$

und einem Druck

$$\frac{p}{s} = C + b \cos mx$$

eine Oberfläche

$$y = \frac{b\left[\left(am - \frac{g}{a}\right)\cos mx - c \sin mx\right]}{a\left[\left(am - \frac{g}{a}\right)^2 + c^2\right]}. \tag{81}$$

Eine beliebige Vertheilung des Drucks auf der Oberfläche lässt sich nach dem Fourier'schen Satz bestimmen.

Ist der Druck

$$\frac{p}{s} = C + b f(x),$$

so ist

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dm \int_{-\infty}^\infty f(k) \cos m(x-k)\, dk$$

und demnach

$$y = \frac{b}{a\pi}\int_0^\infty dm \int_0^\infty \frac{f(k)\left[\left(am - \frac{g}{a}\right)\cos m(x-k) - c \sin m(x-k)\right] dk}{\left[\left(am - \frac{g}{a}\right)^2 + c^2\right]}.$$

Nehmen wir wieder an, dass der Druck nur auf eine Fläche von geringer Ausdehnung wirkt, so ist

$$P = b\int_{-\infty}^{\infty} f(k)\, dk$$

die Grösse des Gesammtdrucks und wir haben

$$y = \frac{P}{a\pi}\int_0^{\infty} dm\, \frac{\left[\left(am - \frac{g}{a}\right)\cos mx - c\sin mx\right]}{\left(am - \frac{g}{a}\right)^2 + c^2}. \tag{82}$$

Wir beschränken uns auf die Behandlung des bestimmten Integrals für den Fall, dass der Widerstand an der Oberfläche und damit c verschwindend klein ist.

Wir haben dann

$$y = \frac{P}{a\pi}\int_0^{\infty} \frac{dm\cos mx\left(am - \frac{g}{a}\right)}{\left(am - \frac{g}{a}\right)^2 + c^2}. \tag{83}$$

Zur Bestimmung dieses Integrals gehen wir aus von dem Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dm\left(am - \frac{g}{a}\right)\cos mx}{m^2 - \frac{2gm}{a^2} + \frac{g^4}{a^4} + \frac{c^2}{a^2}} = -\pi a \sin\frac{gx}{a^2}\, e^{-\frac{\sqrt{c^2}}{a}x} \qquad x > 0$$

$= 0$ für $x \leqq 0$ (Vgl. Bierens de Haan, Bestimmte Integrale, T. 202 Nr. 13)

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{dm\left(am - \frac{g}{a}\right)\cos mx}{m^2 - \frac{2gm}{a^2} + \frac{g^2}{a^4} + \frac{c^2}{a^2}} + \int_0^{\infty} \frac{dm\left(am - \frac{g}{a}\right)\cos mx}{m^2 - \frac{2gm}{a^2} + \frac{g^2}{a^4} + \frac{c^2}{a^2}}$$

$$= -\int_0^{\infty} \frac{dm\left(am + \frac{g}{a}\right)\cos mx}{m^2 + \frac{2gm}{a^2} + \frac{g^2}{a^4} + \frac{c^2}{a^2}} + \int_0^{\infty} \frac{dm\left(am - \frac{g}{a}\right)\cos mx}{m^2 - \frac{2gm}{a^2} + \frac{g^2}{a^4} + \frac{c^2}{a^2}}.$$

Es ergiebt sich also

$$\int_0^\infty \frac{dm\left(am-\frac{g}{a}\right)\cos mx}{\left(am-\frac{g}{a}\right)^2+c^2} = -\frac{\pi}{a}\sin\frac{gx}{a^2}\, e^{-\frac{\sqrt{c^2}}{a}x} + \frac{1}{a^2}\int_0^\infty \frac{dm\left(am+\frac{g}{a}\right)\cos mx}{\left(m+\frac{g}{a^2}\right)^2+\frac{c^2}{a^2}}. \tag{84}$$

Das erste Glied rechts stellt einen Wellenzug mit der Wellenlänge $\frac{2\pi a^2}{g}$, der entsprechend dem Widerstand an der Oberfläche c gedämpft wird.

Setzen wir diesen Widerstand unendlich klein, so haben wir

$$\int_0^\infty \frac{dm\left(am-\frac{g}{a}\right)\cos mx}{\left(am-\frac{g}{a}\right)^2+c^2} = -\frac{\pi}{a}\sin\frac{gx}{a^2} + \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{dm\cos mx}{m+\frac{g}{a^2}} \qquad x > 0$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{dm\cos mx}{m+\frac{g}{a^2}} \qquad x \leqq 0. \tag{85}$$

Schreiben wir nun

$$x\left(m+\frac{g}{a^2}\right) = u, \quad xdm = du, \quad \frac{dm}{m+\frac{g}{a^2}} = \frac{du}{u},$$

so haben wir

$$\int_0^\infty \frac{dm\cos mx}{m+\frac{g}{a^2}} = \cos\frac{gx}{a^2}\int_{\frac{g}{a^2}x}^\infty \frac{\cos u\,du}{u} + \sin\frac{gx}{a^2}\int_{\frac{g}{a^2}x}^\infty \frac{\sin u\,du}{u}.$$

Man bezeichnet gewöhnlich

$$\int_\infty^{\frac{g}{a^2}x} \frac{\cos u}{u}\,du = Ci\left(\frac{gx}{a^2}\right), \quad \int_0^{\frac{g}{a^2}x} \frac{\sin u}{u}\,du = Si\left(\frac{gx}{a^2}\right).$$

Tafeln für die Functionen Ci und Si sind von Glaisher aufgestellt. (Tables of the numerical values of the sine-integral, cosine-integral; Phil. Transact. 1870.)

Da ferner

$$\int_0^\infty \frac{\sin xu}{u}\, du = \frac{\pi}{2}$$

ist, so erhalten wir aus 85)

$$y = -\frac{P}{a^2}\left\{\frac{1}{2}\sin\frac{gx}{a^2} + \frac{1}{\pi}\left[\cos\frac{gx}{a^2}\, Ci\left(\frac{gx}{a^2}\right) + \sin\frac{gx}{a^2}\, Si\left(\frac{gx}{a^2}\right)\right]\right\}$$

für $x > 0$

und $\qquad$ 86)

$$y = -\frac{P}{a^2}\left\{-\frac{1}{2}\sin\frac{gx}{a^2} + \frac{1}{\pi}\left[\cos\frac{gx}{a^2}\, Ci\left(\frac{gx}{a^2}\right) + \sin\frac{gx}{a^2}\, Si\left(\frac{gx}{a^2}\right)\right]\right\}$$

für $x < 0$.

Hieraus folgt, da

$$Ci\left(\frac{gx}{a^2}\right) = Ci\left(-\frac{gx}{a^2}\right), \quad -Si\left(\frac{gx}{a^2}\right) = Si\left(-\frac{gx}{a^2}\right)$$

ist, dass die Oberfläche symmetrisch zur y-Axe liegt.

Für $x = 0$ wird $Ci\left(\frac{gx}{a^2}\right)$ negativ unendlich von der Ordnung $\log x$.

Das Ergebniss ist eine Folge der Annahme, dass ein endlicher Druck auf eine kleine Fläche der Oberfläche einwirkt.

§ 4.

Einzelne Wellen.

Einzeln laufende Wellen auf flachen Canälen sind zuerst von Scott Russell genauer beobachtet worden. Ihre Länge beträgt nach diesen Erfahrungen das zehnfache der Tiefe des Canals und sie besitzen nur dann Stabilität, wenn sie als einzelner Wellenberg fortschreiten, nicht aber, wenn nur ein Wellenthal vorhanden ist.

Die x-Axe liege in dem Boden des Canals.

Wir setzen dann $\sigma' = x + iy$

$$\varphi + i\psi = \Phi(\sigma') = \int f(\sigma')\, d\sigma'.$$

Dann ist nach dem Taylor'schen Satz

$$\Phi(x+iy) = \Phi(x) + iy\,\Phi'(x) - \frac{y^2}{1.2}\Phi''(x) - \frac{iy^3}{1.2.3}\Phi'''(x)\ldots$$

also

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \Phi(x) - \frac{y^2}{1.2}\Phi''(x) + \frac{y^2}{1.2.3.4}\Phi''''(x)\ldots\\ \psi &= yf(x) - \frac{y^3}{1.2.3}f''(x)\ldots\end{aligned}\right\} \quad 87)$$

für $y=0$ ist $\psi=0$; die Flüssigkeit strömt dort also horizontal.

Ferner ist

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= u = f(x) - \frac{y^2}{1.2}f''(x)\ldots\\ -\frac{\partial\varphi}{\partial y} &= -v = yf'(x) - \frac{y^3}{1.2.3}f'''(x)\ldots\end{aligned}\right\} \quad 88)$$

Ist c eine Constante, so müssen an der Oberfläche die Gleichungen gelten

$$\left.\begin{aligned}\psi &= \text{const und}\\ u^2+v^2 &= c-2gy.\end{aligned}\right\} \quad 88\text{a})$$

Nun ist, wenn wir y als Function von x ansehen

$$v = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}u, \quad u^2+v^2 = \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]u^2 = c-2gy,$$

wir haben also

$$u = \sqrt{\frac{c-2gy}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \quad \text{und nach 88)} \quad yf - \frac{y^3}{1.2}f''\ldots = \sqrt{\frac{cy^2-2gy^3}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}. \quad 89)$$

Die weitere Rechnung folgt aus der Annahme, dass y so mit x sich ändert, dass die Differentialquotienten schnell an Grösse abnehmen.

Als erste Näherung folgt aus 87)

$$f = \frac{\psi}{y}.$$

Setzen wir diesen Werth in die linke Seite von 89) ein, so erhalten wir unter der Voraussetzung, dass ψ constant ist,

$$\psi\left[1 - \frac{y^3}{1.2}\frac{d^2\left(\frac{1}{y}\right)}{dx^2}\ldots\right].$$

Die zweite Näherung erhalten wir, wenn wir für f nun $f + \delta$ setzen und den ersten Werth in 87) einsetzen, nämlich

$$\delta = \frac{y^2}{3!} \frac{d^2 \frac{1}{y}}{dx^2},$$

sodass wir jetzt haben

$$\psi \left[1 - \frac{y^3}{3} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{y}\right)\right] = \sqrt{\frac{cy^2 - 2gy^3}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},$$

oder, wenn wir nur Glieder $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ berücksichtigen,

$$\psi^2 \left(1 - \tfrac{1}{3} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \tfrac{2}{3}\, y \frac{d^2y}{dx^2}\right) = cy^2 - 2gy^3.$$

Setzen wir $\frac{dy}{dx} = y'$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dy}\, y'$, so erhalten wir die Differentialgleichung $= \frac{1}{2} \frac{d}{dy} (y'^2)$

$$\psi^2 \left\{1 - \tfrac{1}{3} y'^2 + \tfrac{1}{3}\, y \frac{d}{dy} (y'^2)\right\} = cy^2 - 2gy^3,$$

deren Integral lautet

$$\tfrac{1}{3} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = Cy + \frac{cy^2 - gy^3}{\psi^2} + 1, \tag{90}$$

wo C constant ist,

In grosser Entfernung von der Welle soll nun das Wasser mit der horizontalen constanten Geschwindigkeit a horizontal strömen. Da die Constante c an der ganzen Oberfläche denselben Werth hat, so ist nach 88a)

$$c = a^2 + 2gl.$$

l bedeutet die Tiefe des Canals. Andererseits ist ψ der Unterschied der Werthe, den die Strömungsfunction am Boden und an der Oberfläche hat, also

$$\psi = \int_0^l \frac{d\psi}{dy}\, dy = \int_0^l a\, dl = al.$$

Setzen wir diese Werthe in 90) ein, so ergiebt sich

$$\tfrac{1}{3} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + Cy + \frac{(a^2 + 2gl)\, y^2 - gy^3}{a^2 l^2}. \tag{91}$$

$\frac{dy}{dx}$ muss für $y = l$ verschwinden, weil dort die Oberfläche horizontal ist und muss für $y = h$ verschwinden, wo h den Werth an dem höchsten Punkte der Welle bezeichnet. Wir haben also

$$0 = 1 + Cl + \frac{a^2 + gl}{a^2},$$

$$0 = 1 + Ch + \frac{(a^2 + 2gl)\,h^2 - gh^3}{a^2\,l^2}.$$

Hieraus folgt

$$a^2 = gh, \qquad C = -\frac{2h + l}{hl}.$$

Es verschwindet $\frac{dy}{dx}$ für die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$0 = 1 - y\,\frac{2h + l}{hl} + \frac{(2l + h)\,y^2 - y^3}{hl^2},$$

$$0 = hl^2 - yl(2h + l) + (2l + h)\,y^2 - y^3.$$

Diese Gleichung lässt nämlich sich schreiben

$$0 = (h - y)\,(l - y)^2;$$

die kubische Gleichung hat daher nur die beiden Wurzeln l und h und es wird nach 91)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{3}{hl^2}\,(y - h)\,(y - l)^2 = 0$$

und 92)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3\,(y - l)}{2\,l^2h}\left\{2h + l - 3y\right\}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt, dass $y - h$ negativ sein muss, weil sonst $\frac{dy}{dx}$ imaginär werden würde.

Für $y = h$ ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3\,(h - l)^2}{2\,l^2h}.$$

Es ist also bei diesem Werthe ein Maximum der Curven vorhanden und es kann bei einem Minimum die Druckgleichung nicht erfüllt werden. $\frac{d^2y}{dx^2}$ verschwindet für

$$y = l$$

$$y = \frac{2h + l}{3}.$$

Die Wellenlinie hat einen Wendepunkt bei zwei Drittel ihrer Höhe über die Horizontale $y = l$.

Ferner ergiebt sich durch Integration der Gleichung 92)

$$x = \pm \sqrt{\frac{hl^2}{3(h-l)}} \log \left\{ \frac{2(h-l)-(y-l)+2\sqrt{h-y}\sqrt{(h-l)}}{y-l} \right\}. \qquad 93)$$

y wird gleich l, wenn $x = +\infty$ ist. Die Wellenlinie nimmt immer langsamer an Höhe ab und erreicht die Horizontale erst im Unendlichen. Es giebt daher keine eigentliche Wellenlänge. Ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist $\sqrt{gh}$ in Uebereinstimmung mit den Beobachtungen Russells. Wenn die Höhe der Welle grösser ist als $\frac{a^2}{2g}$, so würde durch den Druck eine Vermehrung der Geschwindigkeit a auf $\sqrt{2gh}$ eintreten müssen, oder bei constanter Geschwindigkeit das Gleichgewicht der Welle aufhören. Nun ist $a^2 = gh$, also die grösste Höhe $h_m - l = \frac{h_m}{2}$ oder $\frac{h_m}{2} = l$, $h_m - l = l$. Die Höhe der Welle kann also niemals grösser sein, als die Tiefe des Wassers.

Lösen wir die Gleichung 93) nach y auf, so erhalten wir

$$\begin{aligned} y - l &= \frac{4(h-l)}{\left(e^{\frac{1}{2}\frac{x}{l}\sqrt{\frac{3(h-l)}{h}}} + e^{-\frac{1}{2}\frac{x}{l}\sqrt{\frac{3(h-l)}{h}}}\right)^2} \\ &= \frac{h-l}{\cos^2\left(i\frac{1}{2}\frac{x}{l}\sqrt{\frac{3(h-l)}{h}}\right)}. \end{aligned} \qquad 94)$$

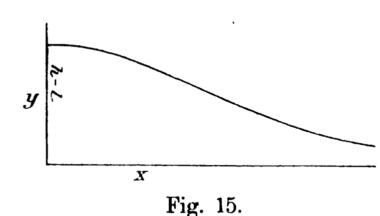


Fig. 15.

In Fig. 15 ist die Welle für $l = 0{,}56$, $h - l = \frac{1}{2}$ gezeichnet. Auch hier erhalten wir dadurch, dass wir dem ganzen System eine Geschwindigkeit $-a$ parallel der x-Axe ertheilen, eine einzelne, mit der Geschwindigkeit $\sqrt{gh}$ laufende Welle auf ruhendem Wasser. Diese Geschwindigkeit ist von Scott Russell (Rep. of Brit. Ass. 1844) durch die Beobachtung bestätigt.

§ 5.

Wellen, bei denen die Bedingung constanten Drucks streng erfüllbar ist.

Die einzige Wellenform, bei der die Bedingung des Drucks an der Oberfläche sich bisher hat streng erfüllen lassen, lässt sich nur mit Hülfe der Differentialgleichungen von Lagrange darstellen. Diese Gleichungen sind bisher noch gar nicht zur Anwendung gekommen, weil ihre Form erheblich complicirter ist als die Euler'sche. Nur in gewissen Fällen bieten sie, wie im vorliegenden Fall, Vortheile, weil die Bedingung der freien Oberfläche (Gl. 28, S. 17) hier einfach durch die Betrachtung zu ersetzen ist, dass die Theilchen der Oberfläche nur in dieser ihre Lage verändern können. Wenn daher die Coordinaten x, y, z eines Theilchens zur Zeit t die Gleichung der Oberfläche erfüllen

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

so muss diese Gleichung auch durch a, b, c, t_0 erfüllt werden, wo a, b, c Grössen sind, die zur Zeit t_0 den Ort eines Flüssigkeitstheilchens bestimmen. Setzt man also x, y, z als Functionen von a, b, c, t ein, so darf die Gleichung t nicht mehr enthalten. Es ist also die Gleichung der Oberfläche eine Gleichung, in der nur a, b, c vorkommen dürfen.

Die allgemeinen Bewegungsgleichungen 30) Abschn. I lassen sich noch durch eine Transformation auf eine einfachere Form bringen. Wir nehmen an, dass die äusseren Kräfte ein Potential haben und setzen

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial V}{\partial z}, \qquad P = \int \frac{dp}{s}.$$

Dann integriren wir die Gleichungen nach dem Schema

$$\int_0^t \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial a}\, dt = \left[\frac{dx}{dt} \frac{\partial x}{\partial a}\right]_{t_0}^{t} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \int_{t_0}^{t} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt.$$

Schreiben wir daher zur Abkürzung

$$F = \int_{t_0}^{t} dt \left(P - V - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]\right), \tag{95}$$

so werden die Gleichungen

$$\left\{\frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{dz}{dt}\frac{\partial z}{\partial a}\right\}_{t_0}^{t}=-\frac{\partial F}{\partial a},$$

$$\left\{\frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{dz}{dt}\frac{\partial z}{\partial b}\right\}_{t_0}^{t}=-\frac{\partial F}{\partial b}, \tag{96}$$

$$\left\{\frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{dz}{dt}\frac{\partial z}{\partial c}\right\}_{t_0}^{t}=-\frac{\partial F}{\partial c}.$$

Wir setzen nun

$$x-a=Ae^{-\alpha b}\sin(\alpha a-\beta t),\quad y-b=Ae^{-\alpha b}\cos(\alpha a-\beta t),\quad z=c \tag{97}$$

und setzen zur Abkürzung $\alpha a-\beta t=\vartheta$.

Die Bewegung geht dann überall parallel der xy-Ebene vor sich. Die obigen Differentialgleichungen 96) und 31) Abschnitt I lauten für diesen Fall

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}-\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}\right)=0,$$

$$\left\{\frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial y}{\partial a}\right\}_{t_0}^{t}=-\frac{\partial F}{\partial a},$$

$$\left\{\frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial y}{\partial b}\right\}_{t_0}^{t}=-\frac{\partial F}{\partial b},$$

$$\frac{dF}{dt}=\frac{p}{s}-gy-\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}.$$

Nun ist zunächst

$$\frac{\partial x}{\partial a}=1+A\alpha e^{-\alpha b}\cos\vartheta,\quad \frac{\partial x}{\partial b}=-A\alpha e^{-\alpha b}\sin\vartheta,\quad \frac{dx}{dt}=-Ae^{-\alpha b}\beta\cos\vartheta,$$

$$\frac{\partial y}{\partial a}=-A\alpha e^{-\alpha b}\sin\vartheta,\quad \frac{\partial y}{\partial b}=1-A\alpha e^{-\alpha b}\cos\vartheta,\quad \frac{dy}{dt}=Ae^{-\alpha b}\beta\sin\vartheta,$$

also ist

$$\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}-\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}=1-A^2\alpha^2e^{-2\alpha b}$$

von t unabhängig. Ferner ist

$$\left\{Ae^{-\alpha b}\beta\cos\vartheta\right\}_{t_0}^{t}=\frac{\partial F}{\partial a},$$

$$\left\{Ae^{-\alpha b}\beta\sin\vartheta\right\}_{t_0}^{t} = -\frac{\partial F}{\partial b}.$$

Der Bedingung $\frac{\partial^2 F}{\partial a\partial b} = \frac{\partial^2 F}{\partial b\partial a}$ ist genügt.

Es folgt daraus

$$\frac{dF}{dt} = -\frac{\beta^2}{\alpha}Ae^{-\alpha b}\cos\vartheta = \frac{p}{s} - \tfrac{1}{2}e^{-2\alpha b}A^2\beta^2 - g\,(Ae^{-\alpha b}\cos\vartheta + b) + \text{const.}$$

Für die freie Oberfläche nehmen wir $b = 0$ an. In ihr muss p constant sein. Dies ist nur der Fall, wenn $\frac{\beta^2}{\alpha}e^{-\alpha b} = ge^{-\alpha b}$, $g = \frac{\beta^2}{\alpha}$ ist. Dann ist

$$p = p_0 + g\left[b + A^2\frac{\alpha}{2}(e^{-2\alpha b} - 1)\right],$$

p_0 ist der Druck an der Oberfläche für $b = 0$.

Ist die Flüssigkeit, abgesehen von der freien Oberfläche, unbegrenzt, so variirt a zwischen $-\infty$ und $+\infty$, b zwischen 0 und ∞.

Für $b = \infty$ verschwindet $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$. Die Flüssigkeit ruht also in grosser Tiefe. Aus den Gleichungen

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = A^2\beta^2e^{-2\alpha b},\quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = A^2e^{-2\alpha b}$$

folgt, dass jedes Flüssigkeitstheilchen sich in einem Kreise bewegt, dessen Radius $Ae^{-\alpha b}$ ist. Diese Kreise sind also in der Nähe der Oberfläche am grössten und nehmen nach der Tiefe schnell an Grösse ab.

Die Determinante

$$D = \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a} = 1 - A^2\alpha^2e^{-2\alpha b}$$

darf nicht Null werden. Deshalb muss

$$A < \frac{1}{\alpha}$$

sein.

Der Druck ist nicht nur in der Oberfläche für $b = 0$ constant, sondern für jeden Werth von b. Man erhält daher die Curven $p = \text{const}$, wenn man aus den ursprünglichen Gleichungen a eliminirt als Gleichungen zwischen x und y.

Dies ergiebt

$$\frac{y-b}{Ae^{-\alpha b}} = \cos\vartheta, \qquad a = \frac{\vartheta + \beta t}{\alpha},$$

$$x - \frac{\beta t}{\alpha} = \sqrt{A^2 e^{-2\alpha b} - (y-b)^2} + \frac{1}{\alpha} \arccos \frac{y-b}{Ae^{-\alpha b}}.$$

Schreibt man $x' = x - \frac{\beta}{\alpha} t$, so erhalten wir eine Gleichung zwischen x' und y, die von der Zeit unabhängig ist. Der Anfangspunkt der x' und also auch die Curve der freien Oberfläche schreitet mit der Geschwindigkeit parallel der x-Axe mit der Geschwindigkeit

$$\frac{x}{t} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{g}{\alpha},$$

ohne Aenderung der Form, fort. Jedes Flüssigkeitstheilchen bewegt sich in einem Kreise, dessen Radius mit der Tiefe des Wassers abnimmt. In Fig. 16 sind die Oberfläche und einige Curven gleichen Drucks sowie einige Kreisbahnen der Flüssigkeitstheilchen gezeichnet.

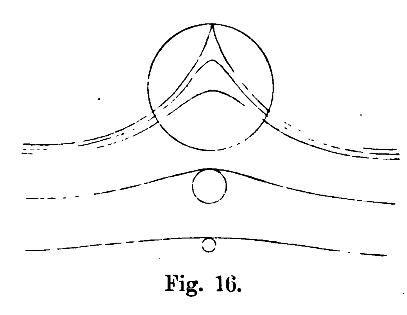


Fig. 16.

Die Curve ist eine gedehnte Cycloide. Der Radius des rollenden Kreises ist $\frac{1}{\alpha}$, der Abstand des sie beschreibenden Punktes ist $Ae^{-2\alpha b}$.

Sie schneidet die Abscissenaxe nicht und hat in den Punkten

$$x = 0, \pm\frac{\pi}{\alpha}, \pm\frac{2\pi}{\alpha} \ldots.$$

abwechselnd untere und obere Culminationspunkte.

Die hierdurch dargestellte Wellenlänge hat die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}.$$

Aus der Form der Druckgleichung bei Vergleichung mit Gl. 34) Abschn. I geht hervor, dass für diese Bewegungsform kein Geschwindigkeitspotential vorhanden ist.

Die Drehungsgeschwindigkeit ergiebt sich in folgender Weise. Es ist

$$D\frac{\partial u}{\partial y} = D\left(\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial a}{\partial y} = -\frac{1}{D}\frac{\partial x}{\partial b}, \quad \frac{\partial b}{\partial y} = \frac{1}{D}\frac{\partial x}{\partial a},$$

also

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial u}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial u}{\partial a}\right)\frac{1}{D} \text{ und ebenso}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial v}{\partial a} - \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial v}{\partial b}\right)\frac{1}{D}.$$

Setzen wir die gewonnenen Werthe ein, so erhalten wir

$$2\,\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2A^2\alpha^2\beta e^{-2\alpha b}}{1 - A^2\alpha^2 e^{-2\alpha b}}.$$

Obwohl die Bedingung des constanten Drucks bei diesen Wellen genau erfüllt ist, scheint es doch nur eine besondere Form dynamischen Gleichgewichts zu sein, die in Wirklichkeit wenigstens bei den Wellen an der Oberfläche des Wassers niemals vorhanden sein wird. Denn die Drehungen, wie sie für diese Bewegungsform verlangt werden, können durch die nichtconservativen Vorgänge, die überhaupt nur Drehungen hervorrufen können, kaum hervorgerufen werden.

Aber ein zweiter Grund, weshalb diese Wellen in Wirklichkeit nicht vorkommen werden, liegt darin, dass wir es in der Natur immer mit Wellen zu thun haben, die an der Trennungsfläche zweier Flüssigkeiten entstehen, niemals aber mit einer freien Flüssigkeitsoberfläche, die an den leeren Raum grenzt. Die Gestalt der Oberfläche muss daher eine solche sein, dass auch die obere Flüssigkeit noch Bewegungen ausführen kann, die mit den allgemeinen hydrodynamischen Principien vereinbar sind. Die Bewegungen einer oberen Flüssigkeit, die sich der betrachteten Wellenlinie anpasst und an der Trennungslinie die Bedingung gleichen Drucks erfüllt, führt zu Werthen der Geschwindigkeit, die mit zunehmender Entfernung von der Wellenlinie immer grösser und grösser werden und schliesslich ins Unendliche wachsen.

Bemerkenswerth ist aber auch hier, dass die Höhe der Wellen eine beschränkte ist. Diese grösste Höhe entspricht den Werthen $b = 0$, $A = \frac{1}{\alpha}$. Sie ist $2A$. Das Verhältniss der Wellenlänge zu dieser grössten Höhe ist π. Die Drehungsgeschwindigkeit ist in diesem Grenzfall an der Oberfläche unendlich.

§ 6.

Schwingungen einer Flüssigkeit in einem prismatischen Gefäss.

Von Wellenbewegungen bei veränderlicher Tiefe haben sich ausser den betrachteten sehr wenige Fälle behandeln lassen. Zu diesen gehören die stehenden Wellen einer schweren Flüssigkeit in einem prismatischen Gefässe. Unter der Voraussetzung, dass die Bewegung nur von den beiden Coordinaten x und y abhängt, setzen wir

$$\varphi + i\psi = \left[1 - a\,[x + iy - i\,(x + iy)] - i\,\frac{a^2}{2}\,(x + iy)^2\right] \sin nt,$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} \varphi &= [1 - a\,(x + y) + a^2 xy] \sin nt, \\ \psi &= \left[a\,(x - y) - \frac{a^2}{2}\,(x^2 - y^2)\right] \sin nt. \end{aligned} \tag{98}$$

Es wird $\psi = 0$ für $x = y$, und $x + y = \frac{2}{a}\cdot$

Die Flüssigkeit kann hiernach durch zwei, sich rechtwinklig schneidende Ebenen begrenzt werden. Die Entfernung der Schnittlinie von der xz-Ebene ist gleich $\frac{1}{a}\cdot$ Die Flüssigkeit soll im Gleichgewichtszustande der xz-Ebene parallel sein. Während der Bewegung sollen die Abweichungen von der Gleichgewichtslage ebenso wie die Geschwindigkeiten sehr klein sein.

Die Schwere wirke in der Richtung der positiven y. Dann giebt die Bedingung constanten Drucks an der Oberfläche, wenn die Quadrate der Geschwindigkeiten vernachlässigt werden

$$gy - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{const}$$

oder $gv = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$; da aber $v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ ist, so folgt

$$g\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \text{ für } y = 0.$$

Diese Bedingung giebt

$$ag = n^2.$$

Die Schwingungsdauer ist gleich $\frac{2\pi}{\sqrt{ag}}$, also gleich der eines Pendels, dessen Länge der grössten Tiefe der Flüssigkeit gleich ist.

Für $y = 0$ ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = (-a + a^2 x) \sin nt.$$

Die Breite des prismatischen Gefässes, in dem sich die Flüssigkeit befindet, ist an dem ruhenden Wasserspiegel $\frac{2}{a}$, die grösste Tiefe des Wassers $\frac{1}{a}$. Nun ist in der Oberfläche $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ für $x = \frac{1}{a}$. An dieser Stelle finden keine vertikalen Bewegungen des Wassers statt. Für $x > \frac{1}{a}$ hat $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ das entgegengesetzte Vorzeichen wie für $x < \frac{1}{a}$. Die Oberfläche führt Schwingungen aus um die Linie $x = \frac{1}{a}$. Da $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ für $y = 0$ eine lineare Function von x ist, so bleibt die Wasseroberfläche bei den Schwingungen eine Ebene. Die inneren Flüssigkeitstheilchen bewegen sich in gleichseitigen Hyperbeln, deren Asymptoten die Gefässwände bilden. In der Fig. 17 bedeuten die stark ausgezogenen Linien die Wände, die schwache Linie die horizontale Oberfläche, die punktirten die Lage der Oberfläche nach jeder halben Schwingung, die punktirten Hyperbeln die Stromlinien.

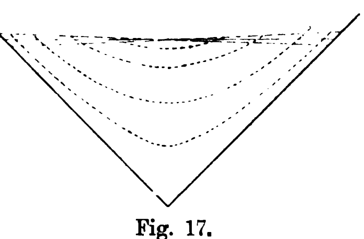


Fig. 17.

Die erste Theorie der Wellen rührt von Lagrange her (Mec. analytique Abschn. XI). Später hat Poisson (Mémoire sur la théorie des ondes; Mém. de l'Acad. royal des sciences 1816) die Ausbreitung der Wellen, die von einer plötzlichen Erschütterung ausgehen, behandelt. Ueber diese sehr verwickelte Theorie haben W. Thomson (On the waves produced by a single impulse in water of any depth; Proc. Royal Soc. Febr. 1887) und W. Burnside (On deep-water waves, resulting from a limited original disturbance; Proc. Lond. math. soc. 20, S. 22; 1888) geschrieben.

Die Gruppengeschwindigkeit ist von Lord Rayleigh eingeführt (Theory of sound I, S. 246).

Die Wellen von endlicher Höhe, deren Form eine Cycloide ist, sind zuerst von Gerstner (Theorie der Wellen; Prag 1804;

Gilbert's Annalen 32, 1809), später unabhängig von Rankine (Lond. Phil. Transact. I, S. 227, 1883) behandelt.

Die im § 1 durchgeführte Näherungstheorie stammt in ihren Grundzügen von Helmholtz (Berl. Ber. 25. Juli 1889; 17. Juli 1890). Der Einfluss des Windes auf die Wellengeschwindigkeit bei tiefem Wasser ist von W. Thomson bestimmt (Phil. Mag. (4) 42, S. 369, 1871). Die Wellenbildung durch Unebenheiten des Strombettes ist ebenfalls von W. Thomson behandelt (On the stationary waves in flowing water; Phil. Mag. Oct. Nov. Dec. 1886 und Jan. 1887). Die Bildung stehender Wellen durch äussere Einwirkung auf eine Stelle der Oberfläche ist von Lord Rayleigh entwickelt (On the form of standing waves on the surface of running water; Proc. Lond. math. soc. 15, S. 69, 1883). Die Einzelwellen sind von Scott Russell (Report on waves; Rep. of Brit. Ass. 1844) auf Canälen beobachtet worden. Die Theorie stammt von Boussinesq (Compt. rend., 19 Juni 1871) und Lord Rayleigh (Phil. Mag., April 1876). Die Schwingungen einer Flüssigkeit in einem primatischen Gefäss sind von Kirchhoff behandelt (Ueber stehende Schwingungen einer schweren Flüssigkeit, Ges. Abh., S. 428; Kirchhoff und Hansemann, Wied. Ann. 10, S. 337, 1880).

Die Frage nach Erregung und Stabilität der Wellen ist noch als offen zu betrachten. Keine der bisher hierüber angestellten Betrachtungen sind als entscheidend anzusehen. (Vgl. Lamb, Hydrodynamics, Art. 224, 225; W. Thomson, Hydrokinetic solutions and observations, Phil. Mag., Nov. 1871.)

Die Transformation der Gleichungen von Lagrange rührt von H. Weber her (Ueber eine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen, Crelle Bd. 68; 1868).

VI. Ebbe und Fluth.

§ 1.

Fluthwellen in Canälen.

Die Theorie von Ebbe und Fluth muss auf den dynamischen Charakter der Fluthwellen Rücksicht nehmen und stützt sich dann auf folgende Annahmen. Die Tiefe der Wassermasse h ist klein im Vergleich zur Länge der Fluthwelle; ebenso sind die Abweichungen des Wasserspiegels von der Horizontalen als klein anzusehen. Die störenden Kräfte sind periodisch. Die vertikale Coordinate ist y.

Betrachten wir zunächst Störungen, bei denen alle Bewegungen parallel einer Ebene der x, y vor sich gehen. Die Gleichung der Continuität ist dann

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Nennen wir η die Erhebung des Wassers über die Horizontale, so ist, da das Druckgefälle als unabhängig von der vertikalen Coordinate und die horizontale Bewegung als unabhängig von der Wassertiefe angenommen wird,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = gs \frac{\partial \eta}{\partial x}. \tag{2}$$

Da nun mit Vernachlässigung der quadratischen Glieder

$$s \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} \tag{3}$$

ist, so haben wir

$$g \frac{\partial \eta}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{und} \quad v = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \qquad y = h + \eta \tag{4}$$

an der Oberfläche.

Integriren wir die Continuitätsgleichung 1) nach y, so erhalten wir

$$v = -y\frac{\partial u}{\partial x} = -(h+\eta)\frac{\partial u}{\partial x}$$

oder annähernd

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -h\frac{\partial u}{\partial x}. \qquad 4a)$$

Durch Elimination von u folgt

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \qquad 5)$$

Haben wir es mit einem Canal von beliebig geformtem Querschnitt, dessen Fläche S ist, zu thun, so fliesst in der Zeit dt aus dem zwischen x und $x + dx$ liegenden Raum die Wassermenge

$$-dx\frac{\partial (uS)}{\partial x}$$

parallel der x-Axe aus. Parallel der y-Axe, wenn b die Breite der Wassermasse an der Oberfläche bedeutet, fliesst nach 4) die Menge $\frac{\partial \eta}{\partial t}b\,dx$ aus der Oberfläche aus. Wir haben also die Gleichung

$$-\frac{\partial (uS)}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial t}b. \qquad 6)$$

Die Differentialgleichung ist die bekannte der schwingenden Seiten. Die allgemeine Lösung ist

$$\eta = f(at - x) + f_1(at + x), \qquad 7)$$

wo $a = \sqrt{gh}$ ist, f eine beliebige Function eines Arguments ist.

Es werden hierdurch Störungen dargestellt, deren gleiche Phasen mit der Geschwindigkeit a fortlaufen. Diese Geschwindigkeit haben wir für sehr niedrige Wellen schon für den Fall geringer Wassertiefe im Vergleich zur Wellenlänge abgeleitet. Nach dieser Formel ergeben sich folgende Geschwindigkeiten für verschiedene Tiefen

h	a
100 m	31,3 m/sec
500 „	69,9 „
1000 „	98,9 „
5000 „	221,1 „
10000 „	312,7 „

Diese Geschwindigkeiten sind die bei ungestörter Ausbreitung eintretenden und entsprechen den Eigenschwingungen des Systems. Bei den thatsächlichen Erscheinungen der Ebbe und Fluth hat man es mit erzwungenen Schwingungen unter dem Einfluss störender äusserer Kräfte zu thun, bei denen die Periode der Eigenschwingungen von entscheidender Bedeutung ist.

Nach der Analogie der Zurückwerfung der Lichtwellen lässt sich auch die Reflexion der Wasserwellen an einer Stelle, wo eine plötzliche Aenderung in den Dimensionen der Wassermasse eintritt, ableiten.

Diese Stelle liege bei $x = 0$. Wir haben dann zu setzen

$$\eta_1 = f_e\,(a_1 t - x) + f_r\,(a_1 t + x)\,,$$
$$\eta_2 = f_d\,(a_2 t - x)\,,$$
$$u_1 = \frac{g}{a_1} f_e\,(a_1 t - x) - \frac{g}{a_1} f_r\,(a_1 t + x)\,,$$
$$u_2 = \frac{g}{a_2} f_d\,(a_2 t - x)\,.$$

Hier bezieht sich der Index 1 und 2 auf die beiden Seiten der Unstetigkeitsstelle, e, r und d auf die einfallende, reflectirte und durchgehende Welle.

An der Grenze muss die Horizontalströmung stetig sein, d. h. es muss $b_1 h_1 u_1 = b_2 h_2 u_2$ sein. Dies giebt

$$\frac{b_1 h_1}{a_1}\,[f_e\,(a_1 t) - f_r\,(a_1 t)] = \frac{b_2 h_2}{a_2} f_d\,(a_2 t)\,.$$

Ausserdem muss der Druck gleich sein. Dies ist nur der Fall, wenn die Abweichung der Oberfläche von der Horizontalen an der Unstetigkeitsstelle beiderseits gleich ist. Also ist

$$\eta_1 = \eta_2 \quad \text{oder} \quad f_e\,(a_1 t) + f_r\,(a_1 t) = f_d\,(a_2 t)\,.$$

Eliminirt man f_r, so ergiebt sich

$$\frac{2\,b_1 h_1}{a_1} f_e = \left(\frac{b_1 h_1}{a_1} + \frac{b_2 h_2}{a_2}\right) f_d\,,$$

woraus sich das Verhältniss der Amplituden ergiebt.

Die einfachste Uebersicht über die weiteren theoretischen Schritte lässt sich aus dem Problem der Schwingungen des Wassers in einem rings geschlossenen Canal unter dem Einfluss periodischer Kräfte gewinnen. Es ist dasselbe Problem, das auch bei den Schwingungen einer gespannten Saite auftritt. Wirkt auf die

$$-\frac{\varepsilon M}{R^2}\sin\vartheta.$$

Die relative Beschleunigung des Wassers gegen die feste Erde ist also

$$\tfrac{3}{2}\frac{\varepsilon Mr}{R^2}\sin 2\vartheta.$$

Wir können nun unsern Canal betrachten, auf den die störende Wirkung des Himmelskörpers in der Weise einwirkt, dass er in derselben Ebene fortschreitet und also in 24 Stunden den Winkel ϑ von 0 bis 2π ansteigen lässt.

Rechnet man also ϑ von einem Punkte $x = 0$ im Canal, so wird, wenn die Umlaufszeit des Himmelskörpers T ist,

$$\vartheta = 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{l}\right)$$

zu setzen sein. Hier ist l die Länge des Canals, nach dessen Ablauf die Periode zu Ende ist, also $2\pi r$.

Unsere Differentialgleichung 8) wird

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{6\pi\varepsilon Mr}{TR^3}\cos 4\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{l}\right).$$

Hieraus ergiebt sich für u

$$u = \tfrac{3}{8}\frac{\varepsilon Mr}{\pi R^3\left(\frac{a^2}{l^2}-\frac{1}{T^2}\right)}\cos 4\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{l}\right).$$

Da in der Gleichung für die Beschleunigung der Winkel 2ϑ auftritt, so ist die Periode halbtägig. Ferner ist

$$\eta = \frac{ua^2T}{gl}.$$

Das Vorzeichen von η wechselt, wenn $\frac{a^2}{l^2} = \frac{1}{T^2}$, das heisst wenn die Tiefe des Wassers so gross ist, dass die freie Welle in derselben Zeit um die Erde läuft wie der störende Körper. Ist $a^2 < \frac{l^2}{T^2}$, so hat die Fluthwelle entgegengesetzte Phase wie die störende Kraft, es ist also niedriges Wasser unter dem Standort des Himmelskörpers. Dies ist bei allen vorhandenen Meerestiefen der Fall.

Bei den Fluthwellen von stark steigender Amplitude ist die Voraussetzung kleiner Wellenhöhe und kleiner Geschwindigkeiten nicht mehr erfüllt. Man kann nach dem Vorgang von Lamb die

Helmholtz'sche Theorie der Combinationstöne hierauf anwenden, um weitere Näherungen zu erhalten.

Wir haben die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = - g\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(h+\eta)\,u\right] = -\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

bei gleichförmigem Querschnitt.

Diese Gleichungen integrirt man, indem man setzt

$$u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots\dots$$
$$\eta = \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + \varepsilon^3 \eta_3 + \dots\dots$$

und die Glieder, welche gleiche Potenzen von ε enthalten, zum Verschwinden bringt.

Wir erhalten auf diese Weise

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = - g\frac{\partial \eta_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \eta_1}{\partial t} = - h\frac{\partial u_1}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} = - g\frac{\partial \eta_2}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \eta_2}{\partial t} + u_1\frac{\partial \eta_1}{\partial x} = - h\frac{\partial u_2}{\partial x} - \eta_1\frac{\partial u_1}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_1\,u_2) = - g\frac{\partial \eta_3}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \eta_3}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_1\,\eta_2 + u_2\,\eta_1) = - h\frac{\partial u_3}{\partial x}.$$

Schreibt man nun vor, dass $y_1 = H\cos nt$ für $x = 0$ sei, so ergiebt sich

$$\eta = H\cos n\left(t-\frac{x}{a}\right) - \frac{3}{4}\frac{gnH^2}{a^3}x\sin 2n\left(t-\frac{x}{a}\right) + \dots\dots,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{Hn}{a}\sin n\left(t-\frac{x}{a}\right) - \frac{3}{4}\frac{gnH^2}{a^3}\sin 2n\left(t-\frac{x}{a}\right)$$
$$+\frac{3}{2}\frac{gn^2H^2}{a^4}\,x\cos 2n\left(t-\frac{x}{a}\right)\dots$$

Die Werthe von x, für die $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ verschwindet, liegen nicht mehr in gleichen Abständen von einander. Wir haben also keine constante Wellenlänge mehr. Da x noch ausser der Verbindung $t-\frac{x}{a}$ vorkommt, sind die Wellen überhaupt nicht mehr stationär. Ferner sind sie, da sowohl sinus wie cosinus vorkommt, unsymmetrisch in Bezug auf beide durch einen Wellenberg gelegte

Verticale. Bei stationären Wellen lassen sich keine Gleichgewichtsbedingungen für unsymmetrische Wellen finden. Solche unsymmetrische Wellen sind immer an die Bedingung des nicht stationären Zustandes gebunden.

Von grosser Wichtigkeit ist das Problem der Steigerung der Fluthwellen beim Eindringen in schmaler oder flacher werdende Canäle.

Wir hatten für einen Canal von beliebigem Querschnitt nach 6) und 4)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial x}(Su),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x}. \tag{9}$$

Ist h die mittlere Tiefe, so ist $hb = S$. Eliminiren wir η, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{g}{b}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(hbu)$$

und für η 10)

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{g}{b}\frac{\partial}{\partial x}\left(hb\frac{\partial \eta}{\partial x}\right).$$

Nimmt die Breite des Canals z. B. proportional der Entfernung von der Mündung ab, wo $x = l$ ist, so haben wir $b = x$ zu setzen. Die Tiefe h sei constant.

Wenn an der Mündung des Canals durch die offene See die Fluthwelle

$$\eta = H \cos nt$$

unterhalten wird, so haben wir zu setzen

$$\eta = f \cos nt$$

und erhalten

$$-fn^2 = \frac{gh}{x}\frac{df}{dx} + gh\frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Setzen wir $\frac{xn}{a} = z$, so ist die Lösung der Gleichung die für $z = 0$ endlich bleibende Bessel'sche Function $J_0(z)$. Ihr Verlauf giebt die Zunahme der Wellenhöhe, deren absolute Höhe durch die Gleichung

$$H = J_0\left(\frac{ln}{a}\right)$$

gegeben ist, wo H die Höhe der Fluthwelle an der Mündung des Canals in die offene See ist.

Um gleichzeitigen Einfluss von Höhen- und Breitenabnahme des Canals zu berücksichtigen, setzen wir

$$b = b_1 x,$$
$$h = b_2 x,$$

so wäre $b_1 l$ und $b_2 l$ die Breite und Tiefe an der Mündung, also

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{g}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(b_2 x^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right).$$

Wieder ist $\eta = \cos ntf(x)$.

Wir erhalten für f die Differentialgleichung

$$x \frac{d^2 f}{dx^2} + 2 \frac{df}{dx} + \frac{n^2 f}{g b_2} = 0.$$

Setzen wir $\frac{n^2}{g b_2} = k^2$, so ist das Integral, das für $x = 0$ endlich bleibt,

$$f = C \left(1 - \frac{k^2}{1.2} x + \frac{k^4}{1.2.2.3} x^2 - \frac{k^6}{1.2.2.3.3.4} x^3 \dots \right).$$

Auch diese Function ist periodisch nach x, ebenso wie im vorigen Falle haben wir eine Zunahme der Wellenhöhe bei Entfernung von der Mündung. Bedeutender Einfluss ist aber nur bei bestimmten Dimensionen zu erwarten. Bei halbtägigen Perioden ist nämlich die Grösse $\frac{n^2}{g}$ in meter^{-1} ausgedrückt $1{,}107 \cdot 10^{-9}$, sodass entweder die Grösse b_2 also die Tiefe des Wassers sehr klein oder l sehr gross sein muss, wenn überhaupt volle Perioden zu Stande kommen sollen.

Indessen hängt die Fluthbildung in solchen Canälen sehr von dem Gesetz ab, wie sich die Tiefe ändert. Nehmen wir die Breite des Canals constant gleich b und $h = h_0 x^2$ an, so würde die Tiefe an der Mündung $h_a = h_0 l^2$ sein.

Die Differentialgleichung 10) giebt dann

$$\frac{d}{dx} \left(h_0 x^2 \frac{df}{dx} \right) + \frac{n^2}{g} f = 0,$$

$$f = C x^{-\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4n}{g h_0}}\right)},$$

solange $\frac{4n^2}{g h_0} < 1$ ist.

Es ist dann auch keine Periode vorhanden. Die Amplitude nimmt

aber stark von der Mündung an zu und wird für $x = 0$ unendlich. Ist $\frac{4n^2}{gh_0} > 1$, so ist das vollständige Integral

$$f = \left\{ C_1 \cos [m \log x] + C_2 \sin [m \log x] \right\} x^{-\frac{1}{2}},$$

$$m = \sqrt{\frac{n^2}{gh_0} - \frac{1}{4}}.$$

Hier würde f für $x = 0$ ebenfalls unendlich werden. Daher sind in diesen beiden Fällen die Schwingungen im Canal nicht vollkommen bestimmt, sondern werden es erst, wenn die Grösse der Amplitude sowohl für $x = l$ als auch in der Nähe des Werthes $x = 0$ vorgeschrieben ist.

§ 2.

Fluthwellen auf ebenen, flachen Gewässern.

Wenn die Bewegung von zwei Coordinaten x und z abhängt, so haben wir nach Analogie von 4) und 4a) die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \tag{11}$$

und erhalten durch Elimination von w und u

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right). \tag{12}$$

Setzen wir $\eta = f \cos nt$, $x = \varrho \cos \vartheta$, $z = \varrho \sin \vartheta$, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial f}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + k^2 f = 0, \qquad k^2 = \frac{n^2}{gh}.$$

Setzen wir weiter $f = f_1 \cos \mathfrak{a} \vartheta$, so wird die Gleichung

$$\frac{d^2 f_1}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{df_1}{d\varrho} - \left(\frac{\mathfrak{a}^2}{\varrho^2} - k^2 \right) f_1 = 0,$$

die bekanntlich durch Bessel'sche Functionen integrirt wird und giebt

$$f_1 = \left\{ H_1 J_\mathfrak{a} (k\varrho) + H_2 \mathfrak{J}_\mathfrak{a} (k\varrho) \right\} \varrho^\mathfrak{a}.$$

Hier ist wie S. 82

$$J_\mathfrak{a} (k\varrho) = 1 - \frac{\varrho^2 k^2}{2 (2\mathfrak{a} + 2)} + \frac{\varrho^4 k^4}{2 . 4 (2\mathfrak{a} + 2)(2\mathfrak{a} + 4)} \cdots,$$

$$\mathfrak{J}_\mathfrak{a}(k\varrho) = \frac{d^n J(k\varrho)}{k^{2n}(d\varrho^2)^n},$$

$$-\mathfrak{J}(k\varrho) = J_0(k\varrho)\,[\log(\tfrac{1}{2}k\varrho) - 0{,}577216]$$
$$+ 2\,[J_2(k\varrho) - \tfrac{1}{2}J_4(k\varrho) + \tfrac{1}{3}J_6(k\varrho)\ldots.].$$

Man kann mit diesen Lösungen leicht die Fluthwellen auf einer Wasserfläche berechnen, die von zwei concentrischen Kreisen begrenzt wird. Seien die Radien dieser Kreise R_1 und R_2. Für $\varrho = R_1$ und $\varrho = R_2$ müssen dann die normalen Componenten der Geschwindigkeit verschwinden.

Nun ist

$$u = -\frac{g}{n}\frac{\partial f}{\partial x}\sin nt, \quad w = -\frac{g}{n}\frac{\partial f}{\partial z}\sin nt.$$

Die normale Componente ist daher

$$= -\frac{g}{n}\sin nt\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varrho} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \varrho}\right) = -\frac{g}{n}\sin nt\,\frac{df}{d\varrho}.$$

Also muss für $\varrho = R_1$ und $\varrho = R_2$ die Grösse $\frac{df}{d\varrho} = f'$ Null sein.

Wir haben also

$$\frac{d}{d\varrho}\left[\varrho^\mathfrak{a}\left\{H_1 J_\mathfrak{a}(k\varrho) + H_2\mathfrak{J}_\mathfrak{a}(k\varrho)\right\}\right]_{\varrho = R_1} = 0$$

und

$$\frac{d}{d\varrho}\left[\varrho^\mathfrak{a}\left\{H_1 J_\mathfrak{a}(k\varrho) + H_2\mathfrak{J}_\mathfrak{a}(k\varrho)\right\}\right]_{\varrho = R_2} = 0,$$

woraus das Verhältniss der Constanten H_1 und H_2 zu bestimmen ist. Die Constante k ergiebt sich aus der Gleichung

$$\frac{d}{d\varrho}\left[\varrho^\mathfrak{a}\left\{\frac{J_\mathfrak{a}(k\varrho)}{\mathfrak{J}_\mathfrak{a}(k\varrho)}\right\}\right]_{\varrho = R_1} = \frac{d}{d\varrho}\left[\varrho^\mathfrak{a}\left\{\frac{J_\mathfrak{a}(k\varrho)}{\mathfrak{J}_\mathfrak{a}(k\varrho)}\right\}\right]_{\varrho = R_2}.$$

Ist $R_1 = 0$, d. h. füllt das Wasser die ganze Fläche des Kreises R_2 aus, so muss H_2 Null sein, weil die Function $\mathfrak{J}$ für $\varrho = 0$ unendlich wird. Dann haben wir die Gleichung

$$\frac{d}{d\varrho}\left[\varrho^\mathfrak{a}\left\{J_\mathfrak{a}(k\varrho)\right\}\right]_{\varrho = R_2} = 0$$

und die Werthe von k sind durch die Wurzeln dieser Gleichung bestimmt und zwar sind die kleinsten für $\mathfrak{a} = 0$

$$\frac{kR_2}{\pi} = 1{,}22,\quad 2{,}23,\quad 3{,}24\ldots$$

Ist $\mathfrak{a} = 0$, so ist f unabhängig von ϑ. Die Wellen sind symmetrisch um den Mittelpunkt angeordnet. Ist $\mathfrak{a} = 1$, so ist

$$f = f_1 \cos\vartheta.$$

Jetzt ist die Bewegung symmetrisch in Bezug auf die Linie $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$.

Diese Bewegungen sind ganz analog den auf S. 82 beschriebenen.

Sehr einfach gestaltet sich die Berechnung der Wellen, wenn die Wassermasse ein Rechteck bildet. Wir setzen dann

$$\eta = H \cos m_1 x \cos m_2 z \cos nt$$

und erhalten

$$\sqrt{m_1^2 + m_2^2} = \frac{n}{\sqrt{gh}} = k.$$

Ferner ist

$$u = \frac{Hg\, m_1}{n} \sin m_1 x \cos m_2 z \sin nt, \quad w = \frac{Hg\, m_2}{n} \cos m_1 x \sin m_2 z \cos nt.$$

u ist also Null für $m_1 x = \mathfrak{a}_1 \pi$, w für $m_2 z = \mathfrak{a}_2 \pi$, $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2 = 0, 1, 2 \ldots$; ist also die Wasserfläche durch die geraden Linien $x = 0$, $x = l_1$, und $y = 0$, $y = l_2$ begrenzt, so sind die Werthe von m_1 und m_2

$$m_1 = \frac{\mathfrak{a}_1 \pi}{l_1}, \quad m_2 = \frac{\mathfrak{a}_2 \pi}{l_2}.$$

Der kleinste Werth von n ist daher

$$n = \pi \sqrt{gh \left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2}\right)}.$$

Daher ist die Schwingungsdauer

$$T = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\, l_1\, l_2}{\sqrt{gh\,(l_1^2 + l_2^2)}}.$$

In der folgenden Tabelle ist die Dauer freier Schwingungen in Stunden auf einer rechteckig begrenzten Wassermasse für verschiedene Dimensionen in Metern gegeben:

		$l_1 =$ 10^3	10^4	10^5	10^6
$h = 10^2$	$l_2 = 10^3$	$T =$ 0,0125	0,0176	0,0177	0,0177
$h = 10^2$	$l_2 = 10^6$	$T =$ 0,0177	0,177	1,76	12,54
$h = 10^4$	$l_2 = 10^3$	$T =$ 0,0125	0,00176	0,00177	0,00177
$h = 10^4$	$l_2 = 10^6$	$T =$ 0,00177	0,0177	0,176	1,254

Wirkliche Fluthwellen unter der Einwirkung kleiner störender, der Zeit und dem Raum nach veränderlicher Kräfte, deren

Potential $\mathfrak{B}$ ist, lassen sich aus den Gleichungen 11) gewinnen, wenn wir setzen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x}, \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z}. \tag{13}$$

Wir haben dann in unsere Gleichung für η die Grösse $\eta + \frac{\mathfrak{B}}{g}$ einzusetzen.

Die Differentialgleichung für η ist dann

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \frac{1}{gh}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial z^2}\right)\frac{1}{g} \tag{14}$$

und an der Grenze muss

$$\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\eta + \frac{\mathfrak{B}}{g}\right) = 0 \text{ sein.}$$

Die gezwungenen Schwingungen ergeben sich am einfachsten für die kreisförmige Wasserfläche. Hier war

$$\eta = HJ_{\mathfrak{a}}(k\varrho)\,\varrho^{\mathfrak{a}} \cos nt \cos \mathfrak{a}\vartheta.$$

Wir werden also der Amplitude der gezwungenen Schwingungen den Factor $\cos nt \cos \mathfrak{a}\vartheta$ ebenfalls beilegen. Setzen wir

$$\eta + \frac{\mathfrak{B}}{g} = f_2 \cos \mathfrak{a}\vartheta \cos nt, \qquad \eta = f \cos \mathfrak{a}\vartheta \cos nt,$$

so haben wir

$$\frac{\mathfrak{B}}{g} = (f_2 - f)\cos \mathfrak{a}\vartheta \cos nt; \qquad \frac{\partial f_2}{\partial \varrho} = 0 \text{ für } \varrho = R$$

und

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial f_2}{\partial \varrho} - \frac{\mathfrak{a}^2}{\varrho^2} f_2 + k^2 f = 0.$$

Jede Function f_2 von ϱ, welche die erste Bedingung erfüllt und überall endlich und stetig bleibt, erzielt einen bestimmten Werth von f. Der Werth von $\mathfrak{a}$ ist durch die Periode der äusseren Kräfte bestimmt. Es giebt daher unendlich viele verschiedene Functionen, welche die Bedingungen erfüllen. Bestimmt wird das Problem erst durch Vorschriften über die Form der Function zu einer beliebigen Zeit, oder durch die Forderung, dass die Form der Wellen mit denen bei freien Schwingungen übereinstimmt. In dem letzten Falle muss

$$f = \text{const}\ \varrho^{\mathfrak{a}} J_{\mathfrak{a}}(k\varrho)$$

sein, und daraus folgt

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial \vartheta^2} = 0, \qquad f_2 = B\varrho^{\mathfrak{a}} - CJ_{\mathfrak{a}}\,\varrho^{\mathfrak{a}}(k\varrho).$$

Die Grenzbedingung ergiebt

$$B\mathfrak{a} R^{\mathfrak{a}-1} = kC \frac{d}{d\varrho} [\varrho^{\mathfrak{a}} J_{\mathfrak{a}}(k\varrho)]_{\varrho = R}, \text{ also } C = -\frac{B\mathfrak{a} R^{\mathfrak{a}-1}}{k \frac{d}{d\varrho} [\varrho^{\mathfrak{a}} J_{\mathfrak{a}}(k\varrho)]_{\varrho = R}},$$

demnach

$$f = -\frac{B\mathfrak{a} R^{\mathfrak{a}-1}}{k \frac{d}{d\varrho} [\varrho^{\mathfrak{a}} J_{\mathfrak{a}}(k\varrho)]_{\varrho = R}} \cdot \varrho^{\mathfrak{a}} J_{\mathfrak{a}}(k\varrho)$$

für die freie Schwingung ist $\frac{d}{d\varrho} [\varrho^{\mathfrak{a}} J_{\mathfrak{a}}(k\varrho)]_{\varrho = R} = 0$; stimmt also die Periode der störenden Kraft mit der Periode Eigenschwingung überein, so wird, wie bei allen Schwingungsproblemen, die Amplitude unendlich. In Wirklichkeit verhindern die Reibungskräfte eine Steigerung der Fluthwelle über eine gewisse Grösse. Will man ohne Einführung der Reibungskräfte ausdrücken, dass die Wellen endliche Grösse behalten, auch wenn die Periode der Störung der Eigenschwingung sich nähert, so muss man eine Abhängigkeit der störenden Kraft von der Schwingungszahl annehmen, so dass diese Null wird, wenn Eigenschwingung und gezwungene Schwingung übereinstimmt.

Nehmen wir wieder den Fall einer rechteckig begrenzten Wassermasse und setzen

$$\eta - \frac{\mathfrak{B}}{g} = H_1 \cos m_1 x \cos m_2 z \cos nt, \quad \eta = H \cos m_1 x \cos m_2 z \cos nt.$$

Die Grenzbedingung ergiebt $m_1 = \frac{\mathfrak{a}_1 \pi}{l_1}$, $m_2 = \frac{\mathfrak{a}_2 \pi}{l_2}$.

Andererseits giebt die Differentialgleichung 14)

$$H_1 (m_1^2 + m_2^2) = k^2 H,$$

also

$$\frac{\mathfrak{B}}{g} = (H - H_1) \cos m_1 x \cos m_2 z \cos nt$$

und

$$\eta = (H - H_1) \frac{m_1^2 + m_2^2}{m_1^2 + m_2^2 - k^2} \cos m_1 x \cos m_2 z \cos nt.$$

Durch die Dimensionen sind m_1 und m_2 bestimmt. Durch die Periode der störenden Kraft ist k^2 und durch die Gleichgewichtsoberfläche die Constante C und somit auch η vollständig bestimmt. Für die Uebereinstimmung der Periode würde man $H = H_1$ und einen beliebigen absoluten Werth von H, dabei $\frac{\mathfrak{B}}{g} = 0$, also eine vollkommen freie Schwingung haben. Dies entspricht den thatsächlichen Verhältnissen besser als die unendlich anwachsende Amplitude.

§ 3.

Ebbe und Fluth einer ebenen Wasserfläche mit Berücksichtigung der Erddrehung.

Die bisherigen Entwicklungen für die Theorie von Ebbe und Fluth sind nur für die langsamen Schwingungen verhältnissmässig wenig ausgedehnter Wasserflächen brauchbar. Für die grossen Weltmeere treten noch zwei andere Momente hinzu, die nicht ausser Acht gelassen werden können, nämlich erstens die Umdrehung und dann die Kugelgestalt der Erde.

Wir werden zunächst den Einfluss der Umdrehung besonders behandeln und folgen der Darstellung von Lord Kelvin. Später werden wir die Ebbe und Fluth einer Wassermasse untersuchen, die eine sich drehende Kugel bedeckt.

Wir nehmen also zunächst die Wassermasse noch so klein an, dass sie als eben angesehen werden kann und mit einer constanten Winkelgeschwindigkeit ω um eine vertikale Axe, die y-Axe, sich dreht.

Der Einfluss der Erddrehung wird berücksichtigt, wenn wir zu den äussern Kräften parallel den Axen der x und z die Componenten

$$\omega^2 x - 2\omega w,$$
$$\omega^2 z + 2\omega u$$

hinzufügen (Kirchhoff, Mechanik, 9. Vorlesung, Gl. 5).

Die durch die Centrifugalkraft hinzukommenden Glieder sind die partiellen Ableitungen von $\frac{\omega^2}{2}(x^2 + z^2)$ und können zum Druck p hinzugenommen werden.

Wir haben so nach 11) die Differentialgleichungen bei Vernachlässigung der quadratischen Glieder

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega w &= -g\frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + 2\omega u &= -g\frac{\partial \eta}{\partial z}. \end{aligned} \tag{15)}$$

Die Gleichung der Continuität ist wieder

$$\frac{\partial (hu)}{\partial x} + \frac{\partial (hu)}{\partial z} = -\frac{\partial \eta}{\partial t}.$$

Eliminiren wir w, so erhalten wir aus den ersten Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 4\omega^2 u = -g\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} + 2\omega \frac{\partial \eta}{\partial z}\right)$$

und 16)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 4\omega^2 w = g\left(2\omega \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial z}\right).$$

Ist h constant, so ergiebt die Gleichung der Continuität

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{h}\frac{\partial \eta}{\partial t}.$$

Differenciren wir die erste der Gleichung 16) nach x, die zweite nach z und addiren, so erhalten wir

$$gh\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + 4\omega^2 \eta.$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist

$$\eta = He^{-\beta z} \cos(nt - mx).$$

Dann giebt die letzte Gleichung

$$m^2 - \beta^2 = \frac{n^2 - 4\omega^2}{gh}. \qquad 17)$$

Nun ist

$$2\omega \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial z}$$

und somit nach 16) w Null, wenn $2\omega m = \beta n$ ist. Aus 17) folgt dann $m^2 = \frac{n^2}{gh}$.

Wir haben dann nur Bewegung parallel der x-Axe, für u findet sich

$$u = \frac{Hgm}{n} e^{-\beta z} \cos(nt - mx).$$

Die Grösse $\frac{n}{m} = \sqrt{gh}$ ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen, die hiernach durch die Drehung nicht beeinflusst wird.

Die Wellenhöhe ist dagegen abhängig von z.

Laufen die Wellen in der Richtung der positiven x und gehen wir in der Richtung der positiven z vor, so nehmen bei positiver Drehung die Wellenhöhen ab.

In schmalen Canälen, in denen die Fluthwelle parallel den Ufern läuft, muss ein derartiger Einfluss der Erdrotation bemerkbar sein.

Die Grösse $\beta = \frac{2\omega}{\sqrt{gh}}$ ist für $\omega = \frac{2\pi}{24}$ Stunden, $h = 1000$ m noch sehr klein. Der Unterschied in der Wellenhöhe an den Ufern eines 100 km breiten Canales ist ungefähr 1 : 0,868.

Führen wir Cylindercoordinaten und $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{y}$ für u und w ein, so gehen die Gleichungen 16) über in

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t^2} + 4\omega^2\mathfrak{r} &= -g\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t\,\partial\varrho} + \frac{2\omega}{\varrho}\frac{\partial\eta}{\partial\vartheta}\right)\\ \frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2} + 4\omega^2\mathfrak{y} &= g\left(2\omega\varrho\frac{\partial\eta}{\partial\varrho} - \frac{\partial^2\eta}{\partial t\,\partial\vartheta}\right)\end{aligned} \tag{18}$$

$$\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\eta}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial\vartheta^2}\right)gh = \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + 4\omega^2\eta. \tag{19}$$

Setzen wir nun

$$\eta = f\cos(nt - m\vartheta),$$

so giebt die Gleichung 19)

$$\frac{d^2f}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{df}{d\varrho} - \left(\frac{m^2}{\varrho^2} - \frac{n^2 - 4\omega^2}{gh}\right)f = 0.$$

Wir werden wieder auf Bessel'sche Functionen geführt, denn das allgemeine Integral ist

$$f = \varrho^m\left\{AJ_m(\varrho k) + B\mathfrak{J}_m(\varrho k)\right\}$$

$$k^2 = \frac{n^2 - 4\omega^2}{gh}.$$

Die Lösung entspricht Fluthwellen in einer von zwei Kreisen mit den Radien $\varrho = R_1$ und $\varrho = R_2$ begrenzten Wasserfläche mit Wellen, die tangential laufen und deren Amplitude von ϱ abhängt. Die Grenzbedingungen ergeben

$$0 = \frac{d}{d\varrho}\left\{\varrho^m\left[AJ_m(\varrho k) + B\mathfrak{J}_m(\varrho k)\right]\right\}_{\varrho = R_1}$$

$$0 = \frac{d}{d\varrho}\left\{\varrho^m\left[AJ_m(\varrho k) + B\mathfrak{J}_m(\varrho k)\right]\right\}_{\varrho = R_2},$$

also

$$\frac{\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho^m J_m(\varrho k)\right)_{\varrho = R_1}}{\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho^m \mathfrak{J}_m(\varrho k)\right)_{\varrho = R_1}} = \frac{\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho^m J_m(\varrho k)\right)_{\varrho = R_2}}{\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho^m \mathfrak{J}_m(\varrho k)\right)_{\varrho = R_2}};$$

aus dieser Gleichung ist k zu bestimmen. Ist $R_1 = 0$, so ist

$$f = \varrho^m AJ_m(\varrho k),$$

also bestimmt sich k aus der Gleichung

$$\frac{d}{d\varrho}\left[\varrho^m J_m(\varrho k)\right] = 0,$$

Um die Winkelgeschwindigkeit ω an einem Orte mit der geographischen Breite γ zu erhalten, ist die Winkelgeschwindigkeit der Erde mit $\sin\gamma$ zu multipliciren. Wenn n^2 grösser ist als 4ω, so wird k imaginär und die Reihe für $J_m(\varrho k)$ enthält nur positive Glieder. Es verschwindet dann die Function und ihre Ableitung für keine Werthe ausser $\varrho = 0$, wenn $m \geqq 2$ ist.

Es sind dann die Grenzbedingungen nicht mehr erfüllbar. Alle reellen Werthe von k führen also auf schnellere Fluthperioden als der Winkelgeschwindigkeit der Erde an dem betreffenden Orte entspricht.

§ 4.

Ebbe und Fluth der Weltmeere.

Wir gehen nun zur Entwicklung der Theorie der Fluthwellen auf einer flachen Wasserfläche, welche die Oberfläche einer sich drehenden Kugel bedeckt. Für die Ableitung der Differentialgleichungen folgen wir Lamb (Hydrodynamics, S. 344). Seien γ und α die geographische Länge und das Complement der Breite, $\mathfrak{z}$ die radiale Entfernung eines Wassertheilchens von der Meeresoberfläche, wenn keine Fluth vorhanden wäre, R der Erdradius, so sind die Componenten der Geschwindigkeit relativ zur festen Erde, wenn wir $\varrho = (R + \mathfrak{z}) \sin\alpha$ setzen,

$$u = (R + \mathfrak{z}) \frac{d\alpha}{dt}, \qquad v = \varrho \frac{d\gamma}{dt}, \qquad \frac{d\mathfrak{z}}{dt}.$$

Die lebendige Kraft des ganzen Systems ist also, wenn ω wieder die Winkelgeschwindigkeit der Erde ist

$$2L = (R + \mathfrak{z})^2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\omega + \frac{d\gamma}{dt}\right)^2 \varrho^2 + \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\right)^2.$$

Die Bewegungsgleichungen leiten wir nach dem allgemeinen Schema von Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_a}\right) - \frac{\partial L}{\partial p_a} = + P_a \quad \text{ab},$$

wo p_a eine beliebige Coordinate, q_a ihr Differentialquotient nach der Zeit und P_a die Componente der äussern Kraft bezeichnet, die p_a zu vergrössern strebt.

Wir haben nun, wenn wir berücksichtigen, dass

$$\frac{d(\varrho^2)}{dt} = 2\varrho\left(\frac{\partial\varrho}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial\varrho}{\partial\mathfrak{z}}\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\right) \text{ ist,}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\frac{d\alpha}{dt}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\alpha} = (R+\mathfrak{z})^2\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \left(\omega + \frac{d\gamma}{dt}\right)^2\varrho\frac{\partial\varrho}{\partial\alpha},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\frac{d\gamma}{dt}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\gamma} = \varrho^2\frac{d^2\gamma}{dt^2} + 2\omega\varrho\left(\frac{\partial\varrho}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial\varrho}{\partial\mathfrak{z}}\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\right), \tag{20}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\frac{d\mathfrak{z}}{dt}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\mathfrak{z}} = \frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} - \left(\omega + \frac{d\gamma}{dt}\right)^2\varrho\frac{\partial\varrho}{\partial\mathfrak{z}}.$$

Ist nun $\mathfrak{V}$ das Potential der Erde, $\mathfrak{V}_1$ das der äussern Kraft, so ist

$$P_\alpha = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{p}{s} + \mathfrak{V} + \mathfrak{V}_1\right),$$

$$P_\gamma = -\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{p}{s} + \mathfrak{V} + \mathfrak{V}_1\right),$$

$$P_\mathfrak{z} = -\frac{\partial}{\partial\mathfrak{z}}\left(\frac{p}{s} + \mathfrak{V} + \mathfrak{V}_1\right).$$

Wir erhalten also folgende Gleichungen, wenn wir die quadratischen Glieder von u, v, $\frac{d\mathfrak{z}}{dt}$ vernachlässigen,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v\cos\alpha = -\frac{1}{R+\mathfrak{z}}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{p}{s} + \mathfrak{V} + \mathfrak{V}_1 - \tfrac{1}{2}\omega^2\varrho^2\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u\cos\alpha + 2\omega\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\sin\alpha = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{p}{s} + \mathfrak{V} + \mathfrak{V}_1 - \tfrac{1}{2}\omega^2\varrho^2\right), \tag{21}$$

$$\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2} - 2\omega v\sin\alpha = -\frac{\partial}{\partial\mathfrak{z}}\left(\frac{p}{s} + \mathfrak{V} + \mathfrak{V}_1 - \tfrac{1}{2}\omega^2\varrho^2\right).$$

Nehmen wir nun die Meerestiefe als sehr klein gegen den Erdradius an, so ist $R+\mathfrak{z}$ durch R zu ersetzen.

Wir nehmen nun an, dass die vertikalen Geschwindigkeiten vernachlässigt werden können. Dann giebt die letzte der Gleichungen 21)

$$\frac{\partial}{\partial\mathfrak{z}}\left(\frac{p}{s} + \mathfrak{V} + \mathfrak{V}_1 - \tfrac{1}{2}\omega^2\varrho^2\right) = 0.$$

Schreiben wir

$$\frac{\partial}{\partial\mathfrak{z}}\left(\mathfrak{V} - \frac{\omega^2}{2}\varrho^2\right) = g',$$

so ist g' die Beschleunigung der Schwerkraft vermindert um die der Centrifugalkraft, also

$$\mathfrak{V} - \frac{\omega^2}{2}\varrho^2 = \text{const} + g'\mathfrak{z}$$

und an der Oberfläche

$$\mathfrak{V} - \frac{\omega^2}{2}\varrho^2 = \text{const} + g'\eta;$$

η ist wieder die Entfernung eines Wassertheilchens in der Oberfläche von der Niveaufläche. Wir haben also

$$\frac{p}{s} + \mathfrak{V} + \mathfrak{V}_1 - \tfrac{1}{2}\omega^2\varrho^2 = \text{const} + g'\eta + \mathfrak{V}_1.$$

Da nach der Annahme die Grössen nicht von $\mathfrak{z}$ abhängen, so gilt diese Gleichung für die ganze Wassermasse. Wir haben also

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v \cos\alpha &= -\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\alpha}(g'\eta + \mathfrak{V}_1), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u \cos\alpha &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\gamma}(g'\eta + \mathfrak{V}_1). \end{aligned} \tag{22}$$

Um die Gleichung der Continuität abzuleiten, betrachten wir ein Volumelement mit der Tiefe h und den Coordinaten α, γ; α, $\gamma + \delta\gamma$; $\alpha + \delta\alpha$, γ; $\alpha + \delta\alpha$, $\gamma + \delta\gamma$; so sind seine Abmessungen h, $R \sin \alpha d\gamma$, $R d\alpha$. Die in Richtung α fliessende Wassermasse ist

$$uR \sin \alpha h d\gamma, \quad \text{die in Richtung } \gamma \text{ fliessende } Rvhd\alpha.$$

Da die Geschwindigkeiten nicht von $\mathfrak{z}$ abhängen, strömt in das Volumelement die Wassermenge

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(uhR\sin\alpha)\, d\gamma \cdot d\alpha + \frac{\partial}{\partial\gamma}(vhR)\, d\alpha \cdot d\gamma.$$

An der freien Oberfläche strömt das Wasser vertikal mit der Geschwindigkeit $\frac{\partial\eta}{\partial t}$ aus, aus dem Volumelement also die Menge

$$R \sin\alpha\, d\gamma\, R\, d\alpha\, \frac{\partial\eta}{\partial t}.$$

Durch Gleichsetzen erhalten wir

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = -\frac{1}{R\sin\alpha}\left(\frac{\partial(uh\sin\alpha)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(vh)}{\partial\gamma}\right)$$

oder da $\varrho = R \sin \alpha$ ist,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial (uh\varrho)}{R\partial \alpha} + \frac{\partial (vh)}{\partial \gamma}\right). \tag{23)}$$

Wir nehmen weiter an, dass die Meerestiefe nur von α abhängt und beschränken die Abhängigkeit von der Zeit und von γ auf den Factor $e^{i[nt + m(\gamma - \chi')]}$, wo χ' die Phase bestimmt. Dieser Factor ist in Uebereinstimmung mit der störenden Kraft Gleichung 27a). Wir erhalten dann

$$inu - 2\omega v \cos \alpha = -\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \alpha}(g'\eta + \mathfrak{B}_1),$$

$$inv + 2\omega u \cos \alpha = -\frac{im}{R \sin \alpha}(g'\eta + \mathfrak{B}_1)$$

oder 24)

$$u = -\frac{\sin(nt + m\gamma)}{R(n^2 - 4\omega^2 \cos^2 \alpha)}\left[\; n\frac{\partial}{\partial \alpha}(g'\eta + \mathfrak{B}_1) + 2\omega m \operatorname{cotg} \alpha\,(g'\eta + \mathfrak{B}_1)\right],$$

$$v = -\frac{\cos(nt + m\gamma)}{R(n^2 - 4\omega^2 \cos \alpha)}\left[2\omega\frac{\partial}{\partial \alpha}(g'\eta + \mathfrak{B}_1)\cos \alpha + \frac{nm}{\sin \alpha}(g'\eta + \mathfrak{B}_1)\right].$$

Wir gehen nun zunächst dazu über die störenden Kräfte, welche die Erscheinungen der Ebbe und Fluth erzeugen, genauer zu untersuchen und dann die einzelnen Gruppen in unsere Theorie einzuführen.

Wir hatten für das Potential des störenden Körpers gefunden

$$\tfrac{1}{2}\frac{\varepsilon M R^2}{L^3}(1 - 3\cos^2 \vartheta),$$

wo ϑ die Zenithdistanz des störenden Körpers ist.

Ist nun η die Erhebung über die Niveaufläche, so folgt aus dem Princip, dass die Wassermasse ungeändert bleiben muss,

$$\int \eta dS = 0,$$

wenn das Integral über die ganze zusammenhängende Wassermasse erstreckt wird, deren Oberfläche S sei.

Nun würde die statische Erhebung des Wassers sein

$$\eta = C - \tfrac{1}{2}\frac{\varepsilon M R^2}{L^3 g'}(1 - 3\cos^2 \vartheta), \tag{25)}$$

wo C sich aus Constanz der Wassermasse ergiebt.

Es ist also

$$C = \tfrac{1}{2}\frac{\varepsilon M R^2}{S L^3 g'}\int dS\,(1 - 3\cos^2 \vartheta),$$

wo die Integration über die mit Wasser bedeckten Theile der Erde zu erstrecken ist.

Sind wieder α und γ die Winkelcoordinaten, χ der Stundenwinkel, δ die Declination des störenden Körpers, so ist nach den Regeln der sphärischen Trigonometrie

$$\cos\vartheta = \cos\delta\cos\alpha + \sin\delta\sin\alpha\cos(\chi-\gamma),$$

$$C = \mathfrak{A}\cos 2\chi\sin^2\delta + \mathfrak{B}\sin^2\delta\sin 2\chi + 4\mathfrak{C}\cos\chi\sin\delta\cos\delta$$
$$+ 4\mathfrak{D}\sin\chi\sin\delta\cos\delta + \tfrac{1}{3}\mathfrak{E}(3\cos^2\delta - 1),$$

wo $\mathfrak{A} = 3b\int dS\sin^2\alpha\cos 2\gamma,\qquad \mathfrak{B} = 3b\int dS\sin^2\alpha\sin 2\gamma,$

$$\mathfrak{C} = 3b\int dS\sin\alpha\cos\alpha\cos\gamma,\quad \mathfrak{D} = 3b\int dS\sin\alpha\cos\alpha\sin\gamma,$$

$$\mathfrak{E} = 3b\int dS(3\cos^2\alpha - 1),\qquad dS = \sin\alpha\, d\alpha\, d\gamma,$$

$$b = \tfrac{1}{2}\frac{\varepsilon M R^2}{S L^3}\quad \text{sind.}$$

Daher wird die Gleichung 25)

$$\eta = -C + \frac{3b}{2}\sin^2\alpha\sin^2\delta\cos 2(\chi-\gamma)$$
$$+ \frac{3b}{2}\sin 2\alpha\sin 2\delta\cos(\chi-\gamma) \tag{26}$$
$$+ \frac{b}{2}(3\cos^2\delta - 1)(3\cos^2\alpha - 1).$$

Dies ist der Werth von η, wenn $u = v = 0$ sind. Aus 22) folgt, dass $\eta = -\frac{\mathfrak{B}_1}{g}$ ist, wenn die Flüssigkeit sich nicht bewegt.

An einem bestimmten Orte auf der Erde sind α und γ gegeben. Dagegen ändert sich der Stundenwinkel um 2π innerhalb vierundzwanzig Stunden. Das erste Glied hat also halbtägige, das zweite tägliche Periode und durch sie wird die halbtägige und tägliche Mond- und Sonnenfluth dargestellt.

Das dritte Glied ist periodisch in Bezug auf $\frac{\delta}{2}$ und stellt also durch die Aenderung der Declination des störenden Körpers die vierzehntägige Mond- und die halbjährige Sonnenfluth dar. Diese bezeichnet man als die Fluthwellen von langer Periode. Die Grösse C hängt nur von den Winkeln χ und δ ab und fällt daher aus den Gleichungen 21) ganz heraus. In unserer dyna-

mischen Theorie spielt sie keine Rolle, wohl aber in der Gleichgewichtstheorie. Wenn die Wasserfläche die ganze Erde bedecken würde, so wäre $C = 0$. So ist C von Null verschieden und ändert seinen Werth mit dem Standort des störenden Gestirns.

Für die Darstellung der halbtägigen Fluthwellen folgen wir einer Darstellung W. Thomsons. Setzen wir u und v aus den Gleichungen 24) in die Gleichung 23) ein, so erhalten wir, wenn wir $g'\eta + \mathfrak{B}_1 = \zeta$ setzen,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin\alpha}\frac{d}{d\alpha}\left\{\frac{h\sin\alpha}{\frac{n^2}{4\omega^2}-\cos^2\alpha}\left(\frac{d\zeta}{d\alpha}+\frac{2m}{n}\omega\zeta\operatorname{cotg}\alpha\right)\right\} \\ -\frac{h}{\frac{n^2}{4\omega^2}-\cos^2\alpha}\left(\frac{2m\,\omega}{n}\operatorname{cotg}\alpha\frac{d\zeta}{d\alpha}+\frac{m^2\zeta}{\sin^2\alpha}\right) \\ = -\frac{4\omega^2R^2}{g'}(\zeta-\mathfrak{B}_1). \end{aligned} \tag{27}$$

Wir setzen nun $\mu = \sin\alpha$ und nehmen h als constant an.

Dann ist die Gleichung der Flüssigkeitsoberfläche nach der Gleichgewichtstheorie zur Zeit t

$$-\frac{\mathfrak{B}_1'}{g'} = \frac{3b}{2}\sin^2\delta\sin^2\alpha\cos[nt-2(\chi-\gamma)], \tag{27a}$$

und da die halbe Periode der Erde die der Störung ist, so ist

$$4\omega^2 = n^2, \quad m = 2,$$

und die Differentialgleichung 27) wird

$$\begin{aligned} \mu^2(1-\mu^2)\frac{d^2\zeta'}{d\mu^2}-\mu\frac{d\zeta'}{d\mu}-\left(8-2\mu^2-\frac{4\omega^2R^2\mu^4}{g'h}\right)\zeta' \\ = +\frac{4\omega^2R^2\mathfrak{B}_1'\mu^4}{g'h} = -A\mu^6\cos[nt-2(\chi-\gamma)], \end{aligned} \tag{28}$$

wo $\zeta' = \zeta\cos[nt-2(\chi-\gamma)]$, $A = \frac{3b}{2}\sin^2\delta\frac{4\omega^2R^2}{h}$ ist. Die gestrichelten Grössen enthalten den Factor $\cos[nt-2(\chi-\gamma)]$.

Die Differentialgleichung vereinfacht sich, wenn wir wieder

$$\eta = \frac{\zeta-\mathfrak{B}_1}{g'}$$

einführen.

Dann erhalten wir die Gleichung, wenn wir $\frac{4\omega^2R^2}{g'h} = a$, $\mathfrak{H} = \frac{3b}{2}\sin^2\delta$ setzen.

$$\mu^2(1-\mu^2)\frac{d^2\eta}{d\mu^2}-\mu\frac{d\eta}{d\mu}-(8-2\mu^2-a\mu^4)\eta = -8\mathfrak{H}\mu^2. \tag{29}$$

Wir setzen jetzt

$$\eta = K_2 \mu^2 + K_4 \mu^4 + K_6 \mu^6 + \cdots\cdot K_{2\mathfrak{a}} \mu^{2\mathfrak{a}} + \cdots$$

Dann ist $K_2 = \mathfrak{H}$,

$$2\mathfrak{a}\,(2\mathfrak{a} + 6)\, K_{2\mathfrak{a}+4} - 2\mathfrak{a}\,(2\mathfrak{a} + 3)\, K_{2\mathfrak{a}+2} + a\, K_{2\mathfrak{a}} = 0\,.$$

Hierdurch sind alle Coefficienten mit Ausnahme von K_4 bestimmt. Dieser wird durch die Bedingung bestimmt, dass die Strömung überall stetig ist. Wir haben

$$K_{2\mathfrak{a}+4} = \frac{2\mathfrak{a}+3}{2\mathfrak{a}+6} K_{2\mathfrak{a}+2} - \frac{a}{2\mathfrak{a}(2\mathfrak{a}+6)} K_{2\mathfrak{a}}\,. \tag{30}$$

Wenn nämlich $K_{2\mathfrak{a}+2}$ nicht unendlich klein gegen $K_{2\mathfrak{a}}$ bei unendlich wachsendem $\mathfrak{a}$ ist, so verschwindet das zweite Glied gegen das erste und wir haben

$$K_{2\mathfrak{a}+4} = \frac{2\mathfrak{a}+3}{2\mathfrak{a}+6} K_{2\mathfrak{a}+2}$$

und

$$K_{2\mathfrak{a}+2} = \frac{2\mathfrak{a}+1}{2\mathfrak{a}+4} K_{2\mathfrak{a}} = \left(1 - \frac{3}{2\mathfrak{a}}\right) K_{2\mathfrak{a}}\ (\lim \mathfrak{a} = \infty)\,.$$

Entwickeln wir nun $(1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}}$ und bilden das Verhältniss zweier auf einander folgender Glieder für unendlich wachsende Stellenzahl, so finden wir für das Verhältniss der Coefficienten von $\mu^{2\mathfrak{a}+2}$ und $\mu^{2\mathfrak{a}}$

$$\frac{K_{2\mathfrak{a}+2}}{K_{2\mathfrak{a}}} = \frac{\frac{1}{2} - \mathfrak{a}}{1 + \mathfrak{a}} = -\left(1 - \frac{3}{2\mathfrak{a}}\right).$$

Die Summe von $\eta + (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}} = f$ wäre endlich und dann wäre η für $\mu = 0$ endlich.

Es ist also

$$\eta = f - \sqrt{1 - \mu^2}\,,$$

$$\frac{d\eta}{d\mu} = \frac{df}{d\mu} + \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}\,,$$

$$\frac{d\eta}{d\alpha} = \frac{d\eta}{d\mu}\sqrt{1 - \mu^2} = \frac{df}{d\mu}\sqrt{1 - \mu^2} + \mu\,.$$

Nun ist $\frac{df}{d\mu}$ für $\mu = 1$ endlich. Es bleibt also $\frac{d\eta}{d\alpha}$ für $\mu = 1$ endlich. Dies ist unzulässig, weil wegen der Symmetrie der halbtägigen Fluth auf der nördlichen und südlichen Halbkugel $\frac{d\eta}{d\alpha} = 0$ sein muss für $\mu = 1$. Es muss also $K_{2\mathfrak{a}+2}$ gegen $K_{2\mathfrak{a}}$ verschwinden.

Thatsächlich bringt man $\frac{d\eta}{d\alpha}$ für $\mu = 0$ zum Verschwinden, wenn man K_4 nicht unbestimmt lässt, sondern die Bestimmung von η so einrichtet, dass man einen Coefficienten der Reihe K_{2a+4} mit möglichst grossem a gleich Null annimmt. Dann ist das Verhältniss von $\frac{K_{2a+2}}{K_{2a}}$ durch die Gleichung 30) bestimmt. Durch abermalige Anwendung dieser Gleichung ist dann $\frac{K_{2a}}{K_{2a-2}}$ bestimmt und so fort bis man das Verhältniss $\frac{K_4}{K_2} = \frac{K_4}{\mathfrak{H}}$ und damit K_4 erhält. In diesem Falle ist die Reihe immer convergent und zwar so convergent, dass $\frac{K_{2a+2}}{K_{2a}}$ für grosses a klein ist. Dann ist aber auch der Werth von η und $\frac{d\eta}{d\mu}$ für $\mu = 1$ endlich, und somit verschwindet

$$\frac{d\eta}{d\alpha} = (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d\eta}{d\mu}$$

für $\mu = 1$.

Laplace hat die Rechnung für drei verschiedene Tiefen der See durchgeführt und zwar für 2206 m, 8827 m, 17654 m.

Die entsprechenden Werthe von a sind

$$40, \quad 10, \quad 5.$$

Er erhielt folgende Reihen

$$\begin{aligned}\eta = \mathfrak{H}\{\mu^2 &+ 20{,}1862\,\mu^4 + 10{,}1164\,\mu^6 - 13{,}1047\,\mu^8 \\ &- 15{,}4488\,\mu^{10} - 7{,}4581\,\mu^{12} - 2{,}1975\,\mu^{14} \\ &- 0{,}4505\,\mu^{16} - 0{,}0687\,\mu^{18} - 0{,}0082\,\mu^{20} \\ &- 0{,}0008\,\mu^{22} - 0{,}0001\,\mu^{24}\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta = \mathfrak{H}\{\mu^2 &+ 6{,}1960\,\mu^4 + 3{,}2474\,\mu^6 + 0{,}7238\,\mu^8 \\ &+ 0{,}0919\,\mu^{10} + 0{,}0076\,\mu^{12} + 0{,}0004\,\mu^{14}\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta = \mathfrak{H}\{\mu^2 &+ 0{,}7504\,\mu^4 + 0{,}1566\,\mu^6 + 0{,}01574\,\mu^8 \\ &+ 0{,}0009\,\mu^{10}\}.\end{aligned}$$

An den Polen, wo $\mu = 0$ ist, findet keine Ebbe und Fluth statt. Am Aequator ist

$$\begin{aligned}\eta &= -\,7{,}434\,\mathfrak{H}, \\ &= \;\;11{,}267\,\mathfrak{H}, \\ &= \;\;\;1{,}924\,\mathfrak{H}.\end{aligned}$$

Im ersten Falle hat die Fluth entgegengesetzte Phase, wie die störende Kraft. Es ist Ebbe, wenn der störende Körper durch den Meridian geht und Fluth, wenn er am Horizont steht.

Für kleine Werthe von μ, also in der Nähe der Pole, ist die Phase der Fluthwelle auch im ersten Falle dieselbe wie die des störenden Körpers, wie bei den anderen Fällen durchweg. Bei diesen nimmt die Fluth dauernd von den Polen zum Aequator zu. Die Coefficienten von $\mathfrak{H}$ zeigen, wie viel grösser der thatsächliche Werth der Fluth ist als $\mathfrak{H}$, die Fluthhöhe ohne Rücksicht auf die Bewegung der Flüssigkeit.

Die freien Schwingungen ergeben sich, da dann $K_2 = \mathfrak{H}_2 = 0$ ist, aus der Reihe

$$\eta = K_4 \mu^4 + K_6 \mu^6 + K_8 \mu^8 + \ldots\ldots$$

und wieder findet sich

$$\frac{K_{2\alpha+2}}{K_{2\alpha}} = \frac{\dfrac{a}{4\alpha(\alpha+3)}}{\dfrac{2\alpha+3}{2\alpha+6} - \dfrac{K_{2\alpha+4}}{K_{2\alpha+2}}}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{K_4}{K_2} = \frac{a}{16\left(\frac{5}{8} - \frac{K_6}{K_4}\right)}.$$

Wenn bei der Berechnung der freien Schwingungen $\frac{K_6}{K_4}$ sich dem Werthe $\frac{5}{8}$ nähert, so wird $\frac{K_4}{K_2}$ unendlich, also K_4 und damit η unendlich, wenn nicht $\mathfrak{H} = 0$ ist. Es stimmen dann wieder die Perioden der gezwungenen und freien Schwingungen überein.

Aus der Laplace'schen Berechnung ergiebt sich für den ersten Fall

$$\frac{K_6}{K_4} = \frac{10{,}116}{20{,}186}, \quad \frac{K_8}{K_6} = -\frac{13{,}1047}{10{,}116},$$

im zweiten Fall

$$\frac{K_6}{K_4} = \frac{3{,}247}{6{,}196}, \quad \frac{K_8}{K_6} = \frac{0{,}7238}{3{,}247}.$$

Man sieht hieraus, dass zwischen beiden Fällen $\frac{K_6}{K_4} = \frac{5}{8}$ wird, also η mit veränderter Tiefe auf unendlich steigt, dann auf $-\infty$ springt und schnell gegen den negativen Werth convergirt.

Wenn α etwas grösser ist, als der kritische Werth, für den $\eta = \infty$ wird, so ist η für sehr kleine μ, also nahe an den Polen,

positiv und geht durch Null zu sehr grossen negativen Werthen über. Es sind dann kleine Parallelkreise um die Pole, innerhalb deren die Fluth directe Phase mit kleiner Fluthhöhe hat, während für den übrigen Theil entgegengesetzte Phase mit grosser Fluthhöhe vorhanden ist. Für den ersten berechneten Fall liegt der trennende Parallelkreis mit verschwindender Fluth bei 18° nördlicher und südlicher Breite. Wird die Meerestiefe noch kleiner, so wird K_4 unendlich und bei weiterer Verringerung gehen wieder Parallelkreise mit verschwindender Fluth von den Polen aus. Dann ist die Fluth am Aequator in directer Phase, zwischen den Parallelkreisen in entgegengesetzter, und an den Polen wieder in directer.

Für die täglichen Fluthen haben wir

$$-\frac{\mathfrak{B}_1}{g} = \frac{3b}{2} \sin 2\alpha \sin 2\delta \cos (\chi - \gamma - nt).$$

Hier ist $n = \omega$ zu setzen, obwohl beim Mond diese Annahme einen Fehler von $\frac{1}{28}$ des Werthes bedingt. Es ist $m = 1$.

Wenn wir diesen Werth von $\mathfrak{B}_1$ in die Differentialgleichung einsetzen, so erhalten wir als Integral

$$\zeta = \mathfrak{B}_1.$$

Es erhält nämlich ζ den Factor $\sin 2\alpha$. Dadurch wird das erste Glied dann $-\frac{4h\zeta}{\sin^2 \alpha}$, das zweite $+\frac{4h\zeta}{\sin^2 \alpha}$. Es ist daher $\eta = 0$, also überhaupt keine Fluthwelle vorhanden. Dies wichtige Resultat der dynamischen Theorie wurde von Laplace abgeleitet und damit die Erklärung für die geringe tägliche Fluthhöhe gegeben, während die blosse Betrachtung des Gleichgewichts eine erhebliche Fluthwelle verlangt. Wenn indessen auch η verschwindet, so verschwinden doch keineswegs u und v, so dass Strömungen durch die tägliche Fluth hervorgerufen werden, aber keine Veränderung der Oberfläche.

Wenden wir uns jetzt zur Theorie der Fluthwellen von langer Periode.

Hier ist

$$-\frac{\mathfrak{B}_1}{g'} = + C\left(\tfrac{1}{3} - \cos^2 \alpha\right) \cos nt, \qquad C = \frac{9b}{2}\left(\tfrac{1}{3} - \cos^2 \delta\right).$$

Die Fluth ist unabhängig von γ. Daher ist $m = 0$.

Setzen wir $\cos \alpha = \mu_1$, so geht die Gleichung 27) über in

$$\frac{d}{d\mu_1}\left[\frac{(1-\mu_1^2)}{\sigma^2 - \mu_1^2}\frac{d\zeta}{d\mu_1}\right] = -a_1\left[\zeta + g' C\left(\tfrac{1}{3} - \mu_1^2\right)\right], \quad \sigma^2 = \frac{n^2}{4\omega^2}, \quad a = \frac{4\omega^2 R^2}{g'h}. \quad 31)$$

Diese Differentialgleichung ist schon von Laplace abgeleitet; er hielt aber ihre genauere Discussion für entbehrlich, weil nach seiner Meinung die Fluthwellen langer Periode aus der Gleichgewichtstheorie gefolgert werden könnten. Wir werden zeigen, dass diese Annahme irrthümlich war.

Es sei

$$\frac{1}{\mu_1^2-\sigma^2}\frac{d\zeta}{d\mu_1}=B_1\,\mu_1+B_3\,\mu_1^3+B_5\,\mu_1^5+\ldots\ldots B_{2\mathfrak{a}+1}\,\mu_1^{2\mathfrak{a}+1}.$$

So ist

$$\frac{1-\mu_1^2}{\mu_1^2-\sigma^2}\frac{d\zeta}{d\mu_1}=B_1\,\mu_1+(B_3-B_1)\,\mu_1^3+\ldots\ldots(B_{2\mathfrak{a}+1}-B_{2\mathfrak{a}-1})\,\mu_1^{2\mathfrak{a}+1}\ldots$$

und

$$\zeta=\text{const}-\sigma^2 B_1^2+\tfrac{1}{4}(B_1-\sigma^2 B_3)\,\mu_1^4+\ldots\frac{1}{2\mathfrak{a}}(B_{2\mathfrak{a}-3}-\sigma^2 B_{2\mathfrak{a}+1})\,\mu_1^{2\mathfrak{a}}\ldots$$

Setzt man diese Reihen in die Gleichung ein, so ergiebt sich für die Coefficienten

$$\text{const}=-\tfrac{1}{3}\,Cg'+\frac{B_1}{a},\quad \text{und wenn } Cg'=C_1 \text{ ist,}$$

$$B_3-B_1\left(1-\frac{1}{2.3}\,\sigma^2\,a\right)+\tfrac{1}{3}\,aC_1=0,$$

$$B_{2\mathfrak{a}+1}-B_{2\mathfrak{a}-1}\left(1-\frac{1}{2\mathfrak{a}\,(2\mathfrak{a}+1)}\,\sigma^2\,a\right)-\frac{1}{2\mathfrak{a}\,(2\mathfrak{a}+1)}\,a\,B_{2\mathfrak{a}-3}=0.$$

Es lässt sich nun durch eine ähnliche Schlussweise, wie sie schon oben benutzt wurde, beweisen, dass das Verhältniss der Coefficienten $\frac{B_{2\mathfrak{a}+1}}{B_{2\mathfrak{a}-1}}$ mit wechselndem $\mathfrak{a}$ gegen Null convergiren muss.

Aus der Gleichung

$$\frac{B_{2\mathfrak{a}+1}}{B_{2\mathfrak{a}-1}}=1-\frac{1}{2\mathfrak{a}\,(2\mathfrak{a}+1)}\,\sigma^2\,a+\frac{a}{2\mathfrak{a}\,(2\mathfrak{a}+1)}\,\frac{B_{2\mathfrak{a}-3}}{B_{2\mathfrak{a}-1}}$$

folgt, dass für unendlich werdendes $\mathfrak{a}$

$$B_{2\mathfrak{a}+1}=B_{2\mathfrak{a}-1}\quad\text{wird.}$$

Wir haben also in der Gleichung für $\frac{1}{\mu_1^2-\sigma^2}\frac{d\zeta}{d\mu_1}$ schliesslich die Glieder $B_{2\mathfrak{a}}\,(\mu_1^{2\mathfrak{a}}+\mu_1^{2\mathfrak{a}+1}+\mu_1^{2\mathfrak{a}+2}+\ldots)$

$$=\frac{B_{2\mathfrak{a}}}{1-\mu_1^2}+f(\mu_1),$$

wo $f(\mu_1)$ eine endlich bleibende Grösse bezeichnet. Also wird $\frac{d\zeta}{d\mu_1}$ und $\frac{d\zeta}{d\alpha} = -\frac{d\zeta}{d\mu_1}\sqrt{1-\mu_1^2}$ für $\mu_1 = 1$ unendlich werden.

Benutzen wir wieder das Näherungsverfahren von Laplace von einem bestimmten $B_{2\mathfrak{a}+1} = 0$ für grosses $\mathfrak{a}$ auszugehen, so sind wieder die Werthe von $\frac{d\zeta}{d\mu_1}$ endlich auch für $\mu_1 = 1$.

Es folgt also

$$\eta = \frac{\zeta - \mathfrak{B}_1}{g'} = \frac{1}{g'}\left\{\frac{B_1}{a} - (C_1 + \tfrac{1}{2}\sigma^2 B_1)\mu_1^2 + \tfrac{1}{4}(B_1 - \sigma^2 B_3)\mu_1^4 \ldots\right\}$$

Für $h = 2206$ m erhalten wir

$$\frac{g\eta}{C_1} = \frac{\eta}{C} = 0{,}1520 - 1{,}0041\,\mu_1^2 + 1{,}5228\,\mu_1^4 - 1{,}2187\,\mu_1^6 + 0{,}6099\,\mu_1^8 - 0{,}2089\,\mu_1^{10} + 0{,}0519\,\mu_1^{12} - 0{,}0098\,\mu_1^{14} + 0{,}0014\,\mu_1^{16} - 0{,}0002\,\mu_1^{18} \ldots.$$

Nach der Gleichgewichtstheorie soll die Amplitude der Fluthwelle

am Pol $-\frac{2}{3}C$ für $\mu_1 = 1$,
am Aequator $+\frac{1}{3}C$ für $\mu_1 = 0$ betragen.

Aus der eben durchgeführten dynamischen Theorie ergiebt sich

$$\eta = -C \cdot 0{,}1037 \quad \text{für } \mu_1 = 1,$$
$$\eta = C \cdot 0{,}1529 \quad \text{für } \mu_1 = 0.$$

Für die Tiefe $h = 8827$ m ergiebt sich

$$\frac{\eta}{C} = 0{,}2363 - 1{,}0016\,\mu_1^2 + 0{,}5910\,\mu_1^4 - 0{,}1627\,\mu_1^6 + 0{,}0258\,\mu_1^8 - 0{,}0026\,\mu_1^{10} + 0{,}0002\,\mu_1^{12}$$

und

$$\eta = -C \cdot 0{,}3137 \quad \text{am Pol},$$
$$\eta = C \cdot 0{,}2363 \quad \text{am Aequator}.$$

Hieraus folgt, dass die wirkliche Amplitude nicht die Hälfte der aus der Gleichgewichtstheorie folgenden beträgt.

Die erste Erklärung der Ebbe und Fluth als Folgerung aus der Gravitationstheorie ist von Newton gegeben. Die mangelhafte Uebereinstimmung mit der Erfahrung führte zur Anwendung der dynamischen Theorie, die für einen die ganze Erde bedeckenden Ozean für die halbtägigen und täglichen Fluthen von Laplace

abgeleitet wurde (Mécanique céleste L. IV). Die Berücksichtigung des Umstandes, dass das Weltmeer nicht die ganze Erde bedeckt, ist von Thomson und Tait eingeführt (Nat. Phil. Art. 808; diese Correction ist übrigens von geringem Einfluss. Vgl. G. H. Darwin, Proc. Royal. Soc., 1. April 1886). Ueber die Theorie von Laplace vgl. W. Thomson (Phil. Mag., Sept. 1875); Airy (Encyclop. Metrop.; Tides and waves; Sect. VI, 1845), Ferrel (U. S. Coast survey Rep. 1874, S. 154). Die Fluthen langer Periode sind behandelt von W. Thomson (Phil. Mag. Oct. 1875), G. H. Darwin (Proc. Royal. Soc., 5. Nov. 1886). Der Einfluss der Erddrehung auf die Ebbe und Fluth ebener Wasserflächen ist ebenfalls von W. Thomson untersucht (Phil. Mag., Aug. 1880). Die Theorie der Fluthwellen auf kreisförmig begrenzten Wasserflächen ohne Rücksicht auf die Erddrehung rührt von Rayleigh her (Phil. Mag., April 1876).

Ueber die Schwingung einer Wassermasse, die eine ruhende Kugel bedeckt, vgl. Lamb (Hydrodynamics Art. 190—193). Fluthwellen in Canälen von veränderlicher Breite und Tiefe sind untersucht von Green (Camb. Trans., 6, 1837); Airy (Tides and Waves, Encyclop. Metrop. Art. 260); Lamb (Hydrodynamics Art. 181, 182).

Die einfache Theorie der Fluthwellen in Canälen von rechteckigem Querschnitt ist bearbeitet von Airy (Tides and Waves, Art. 192); Stokes (Camb. and Dub. Math. Journ. IV, 1849).

Ueber die Anwendung der Riemann'schen Theorie ebener Schallwellen von endlicher Schwingungsweite und der Helmholtzschen Theorie der Combinationstöne vgl. Lamb (Hydrodynamics, Art. 183 und 184).

VII. Reibung der Flüssigkeiten.

Wir gehen bei den Betrachtungen dieses Abschnittes auf die allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen zurück, die wir auf S. 15 abgeleitet haben. Setzen wir $\Theta = -\frac{1}{3}$ entsprechend Gleichung 27 a) Abschnitt I, so lauten diese Gleichungen

$$X - \frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{k^2}{s}\Delta u - \frac{1}{3}\frac{k^2}{s}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$Y - \frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{k^2}{s}\Delta v - \frac{1}{3}\frac{k^2}{s}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right), \qquad 1)$$

$$Z - \frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{k^2}{s}\Delta w - \frac{1}{3}\frac{k^2}{s}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial (su)}{\partial x} + \frac{\partial (sv)}{\partial y} + \frac{\partial (sw)}{\partial z} = 0. \qquad 1\text{ a})$$

Sie genügen nicht dem Gesetz der Erhaltung der Energie, weil ein Theil der lebendigen Kraft der Flüssigkeit durch die Reibung beständig in Wärme verwandelt wird. Dieser Betrag ist nach den Entwicklungen S. 16 während des Zeitelements dt

$$dt\int\!\!\int\!\!\int dx\,dy\,dz\left[X_x\frac{\partial u}{\partial x} + Y_y\frac{\partial v}{\partial y} + Z_z\frac{\partial w}{\partial z} + Y_z\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + Z_x\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + X_y\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$$

$$= -dt\,k^2 \int\!\!\int\!\!\int \Big[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$
$$+ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \tfrac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\Big]\, dx\, dy\, dz. \qquad 2)$$

Wir nennen diesen Betrag $Q dt$. Nehmen wir nun an, dass die Geschwindigkeiten so klein sind, dass wir die Grössen $u\frac{\partial u}{\partial x}$, $v\frac{\partial u}{\partial y}$ u. s. w. gegen die linearen vernachlässigen können und dass die Flüssigkeit von allen Seiten durch feste Körper begrenzt sei. An diesen Grenzflächen setzen wir den Gleitungscoefficienten (vgl. S. 19) gleich Null. Dann hat die Flüssigkeit an diesen Flächen die vorgeschriebenen Geschwindigkeiten der festen Körper. Unter diesen Bedingungen bilden wir die Variation der Grösse $\frac{Q}{2}$, indem wir die Geschwindigkeiten als unabhängige Veränderliche ansehen unter der Bedingung, dass die Flüssigkeit nicht zusammendrückbar ist. Wir haben dann die Bedingung

$$0 = \delta\frac{Q}{2} + \delta\int\!\!\int\!\!\int dx\, dy\, dz\, F\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

wo F eine beliebige Function von x, y, z ist. Bilden wir nun die Variationen und schaffen die partiellen Differentialquotienten von $\delta u, \delta v, \delta w$ durch partielle Integration fort, so erhalten wir Oberflächenintegrale, deren einzelne Glieder mit $\delta u, \delta v, \delta w$ multiplizirt sind. Diese verschwinden also an der Oberfläche, weil dort die Werthe von u, v, w fest vorgeschrieben, die Variationen also Null sind. Es bleibt dann das Raumintegral, wenn die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

berücksichtigt wird,

$$0 = k^2 \int\!\!\int\!\!\int dx\, dy\, dz\, \Big[\left(\Delta u - \frac{1}{k^2}\frac{\partial F}{\partial x}\right)\delta u + \left(\Delta v - \frac{1}{k^2}\frac{\partial F}{\partial y}\right)\delta v + \left(\Delta w - \frac{1}{k^2}\frac{\partial F}{\partial z}\right)\delta w\Big]$$

übrig. Da die Variationen $\delta u, \delta v, \delta w$ von einander unabhängig sind, so haben wir

$$\frac{\partial F}{\partial x} = k^2 \Delta u, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = k^2 \Delta v, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = k^2 \Delta w.$$

Diese Gleichungen stimmen mit 1) überein, wenn

$$X = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z},$$

ferner $\mathfrak{B}s - p = - F$ und $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$ sind.

Wenn also die Flüssigkeit ringsum an den begrenzenden Körpern festhaftet und die äusseren Kräfte ein Potential haben, so ordnen sich bei kleinen Werthen der Geschwindigkeiten im stationären Strome die Strömungen so an, dass die durch Reibung verbrauchte Energie ein Minimum wird.

Bei fast allen Problemen, für deren Behandlung die Kräfte der Analyse ausreichen, muss man sich auf die Beschränkung einlassen, dass die quadratischen Glieder der Geschwindigkeit vernachlässigt werden können. Ist die Bewegung stationär, so ist diese Vernachlässigung gleichbedeutend mit der Vernachlässigung der Trägheit der Flüssigkeit. Dann gilt der eben abgeleitete Satz.

Diejenigen Bewegungen, welche für unendlich kleine Geschwindigkeiten aus den Gleichungen für reibende Flüssigkeiten abgeleitet werden, sind auch im allgemeinen Fall möglich, wenn die Einflüsse der quadratischen Glieder durch äussere Kräfte aufgehoben werden.

Die Grösse dieser Kräfte ist leicht zu bestimmen. Es ist

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2 + w^2) - 2v\zeta + 2w\eta.$$

Nimmt man den rechts stehenden Ausdruck zu den äusseren Kräften hinzu, so werden die von der Trägheit herrührenden Glieder

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

fortfallen. Das Glied $\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$ kann zum Druck hinzugerechnet werden. Dann bleiben für die Componenten der äusseren Kräfte, welche den Einfluss der Trägheit aufheben, die Ausdrücke

$$X = 2(w\eta - v\zeta),$$
$$Y = 2(u\zeta - w\xi),$$
$$Z = 2(v\xi - u\eta).$$

Hieraus folgt

$$uX + vY + wZ = 0,$$
$$\xi X + \eta Y + \zeta Z = 0.$$

Die Richtung der Resultante dieser äusseren Kraft steht also in jedem Punkte senkrecht auf der Richtung der Geschwindigkeit und der Drehungsaxe des Flüssigkeitstheilchens.

§ 1.

Die Kugel.

Die allgemeine Integration der Gleichungen für eine reibende Flüssigkeit lässt sich im Falle der Begrenzung durch eine endliche Fläche nicht durchführen. Man pflegt daher die Glieder zu vernachlässigen, welche die Quadrate der Geschwindigkeiten enthalten. Betrachten wir ausserdem die Flüssigkeit als nicht zusammendrückbar, so erhalten wir die Gleichungen (die äusseren Kräfte sind auf die Schwere beschränkt)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k^2}{s}\Delta u, \\ -\frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{k^2}{s}\Delta v, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \qquad (3) \\ g - \frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{k^2}{s}\Delta w. \end{aligned}$$

Hieraus folgt zunächst $\Delta p = 0$.

Nehmen wir noch die Bewegung als stationär an, so können wir setzen

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + w'$$

und w' die Bedingung erfüllen lassen

$$\Delta w' = 0.$$

Dann ist

$$p = k^2 \Delta\varphi, \qquad \frac{\partial w'}{\partial z} = -\Delta\varphi.$$

Setzen wir $w' = -\frac{c}{r}$, wo c eine Constante und $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist, so ist die Bedingung erfüllt. Dann muss also

$$\Delta\varphi = -\frac{cz}{r^3} \quad \text{sein.}$$

Da $\Delta r = \frac{2}{r}$, $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ ist, so können wir setzen

$$\varphi = ax + b\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{c}{2}\frac{\partial r}{\partial x},$$

wo a und b wieder Constanten bedeuten.

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} u &= 3b\frac{xx}{r^5} - \frac{c}{2}\frac{xx}{r^3}, \\ v &= 3b\frac{yx}{r^5} - \frac{c}{2}\frac{yx}{r^3}, \\ w &= a + b\left(\frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) - \frac{c}{2}\left(\frac{x^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Setzen wir nun

$$\frac{3b}{R^2} = \frac{c}{2}, \qquad a = \frac{b}{R^3} + \frac{c}{2R},$$

daher

$$b = \frac{aR^3}{4}, \qquad c = \tfrac{3}{2}aR,$$

so ist $u = v = w = 0$ für $r = R$. Den Gleitungscoefficienten setzen wir gleich Null. Wir haben es mit der Bewegung einer Flüssigkeit zu thun, die in grosser Entfernung mit der Geschwindigkeit a strömt und in der eine Kugel mit dem Radius R ruht. Denkt man sich das Coordinatensystem mit der Geschwindigkeit $-a$ bewegt, so haben wir die Bewegung einer Kugel mit der constanten Geschwindigkeit a in einer ruhenden Flüssigkeit.

Die Kraft, die auf die Kugel wirken muss, um die constante Geschwindigkeit gegen die Reibungskräfte aufrecht zu erhalten, ist

$$\int Z_n dS = \int (Z_x \cos Rx + Z_y \cos Ry + Z_z \cos Rz)\, dS.$$

Bei der Bildung von $\int dS\, Z_n$ kommt man einfacher zum Ziel, wenn man berücksichtigt, dass die auf eine geschlossene Fläche wirkenden Druckkräfte die Summe Null haben müssen, wenn die Bewegung stationär sein soll. Man kann daher den Raum durch die Kugel und eine zweite mit grossem Radius r begrenzt denken. Dann haben die Druckkräfte auf die grosse Kugel denselben Werth mit entgegengesetztem Vorzeichen wie $\int dS\, Z_n$. Für un-

endlich grosses r ergiebt sich aus den Gleichungen 4) und den Gleichungen 26) Abschnitt I

$$Z_x = -3k^2c\frac{xz^2}{r^5}, \quad Z_y = -3k^2c\frac{yz^2}{r^5}, \quad Z_z = -3k^2c\frac{z^3}{r^5}, \qquad 5)$$
$$Z_n = Z_x\frac{x}{r} + Z_y\frac{y}{r} + Z_z\frac{z}{r}.$$

Es ergiebt sich dann

$$\int Z_n\,dS = -3k^2c\,\frac{1}{r^4}\int z^2\,dS$$
$$= -4\pi k^2 c = -6\pi k^2 Ra. \qquad 6)$$

Zur Bestimmung der Reibungsconstanten k^2 würden wir diesen Vorgang in der Weise verwerthen können, dass wir eine Kugel, die nur wenig mehr spezifisches Gewicht als die Flüssigkeit hat, in dieser langsam sinken lassen und die Geschwindigkeit bestimmen, die die Kugel unter dem Einfluss der Reibung erreicht. Wenn das Gewicht der Kugel M ist und M' ihr Gewicht in der Flüssigkeit, so würde

$$(M - M')\,g = 6\pi k^2 Ra$$
$$k^2 = \frac{(M-M')\,g}{6\pi Ra} \quad \text{sein.} \qquad 7)$$

Wir betrachten jetzt eine geschlossene feste Kugelschale, die in einer unbegrenzten Flüssigkeit drehende Schwingungen ausführt und im Innern von einer zweiten Flüssigkeit gefüllt ist.

Wir setzen

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad w = 0, \quad p = \text{const}; \qquad 8)$$

dann haben wir nach 3) die Gleichung zu erfüllen

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{k^2}{s}\Delta\psi. \qquad 9)$$

Nehmen wir an, dass ψ nur von $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ abhängt, so ist

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{y}{r}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{x}{r}, \qquad 10)$$

es ist also dann $\mathfrak{y} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$ die Drehungsgeschwindigkeit um die z-Axe. Da $\mathfrak{y}$ nur von r abhängt, so dreht sich jede unendlich dünne Kugelschale mit constanter Winkelgeschwindigkeit.

Die Differentialgleichung 9) wird

$$\frac{\partial (r\psi)}{\partial t} = \frac{k^2}{s} \frac{\partial^2 (r\psi)}{\partial r^2}. \qquad 11)$$

Ein partikuläres Integral ist

$$\psi = \frac{Ae^{nt+mr} - Be^{nt-mr}}{r}, \qquad 12)$$

woraus folgt

$$n = \frac{k^2}{s} m^2. \qquad 13)$$

Für die äussere Flüssigkeit muss $\mathfrak{y}$ für $r = \infty$ verschwinden, es muss hier

$$\psi_1 = -\frac{Be^{nt-m_1 r}}{r} \text{ sein.} \qquad 14)$$

Für die innere Flüssigkeit muss $\mathfrak{y}$ für $r = 0$ endlich bleiben. Daraus folgt

$$\psi_2 = \frac{Ae^{nt}}{r} (e^{m_2 r} - e^{-m_2 r}). \qquad 15)$$

Denn für $r = 0$ ist

$$\psi_2 = 2 Ae^{nt} m_2.$$

Die Componenten der Drucke an der inneren Kugeloberfläche sind, da $\cos nx = -\frac{x}{r}$, $\cos ny = -\frac{y}{r}$, $\cos nz = -\frac{z}{r}$,

$$\begin{aligned} X_n &= k^2 y \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial r}, \\ Y_n &= -k^2 x \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial r}, \\ Z &= 0. \end{aligned} \qquad 16)$$

An den beiden begrenzenden Kugelflächen ist nach Gleichungen 29) Abschnitt I (vgl. die Berichtigung)

$$X_n = (u_1 - u) \frac{k^2}{l},$$

$$Y_n = (v_1 - v) \frac{k^2}{l}.$$

Setzen wir die Winkelgeschwindigkeit des Gefässes gleich ω, so ist

$$\begin{aligned} X_n &= k^2 y \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial r} = \frac{k^2}{l} y (\omega - \mathfrak{y}) \\ -Y_n &= k^2 x \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial r} = \frac{k^2}{l} x (\omega - \mathfrak{y}). \end{aligned} \tag{17}$$

Es muss also an den begrenzenden Oberflächen

$$l \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial r} = \omega - \mathfrak{y} \quad \text{sein.} \tag{18}$$

Denkt man sich die Geschwindigkeit jenseits der Wand fortgesetzt mit derselben Zunahme, wie sie in der Nähe der Wand vorhanden ist, so ist $l \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial r}$ die Zunahme der Geschwindigkeit für die Länge l.

Die Gleichung 18) bestimmt den Werth von l so, dass in dieser Entfernung die Geschwindigkeit der Flüssigkeit gleich der des Gefässes wird.

Für die innere Flüssigkeit haben wir

$$\mathfrak{y}_2 = \frac{m_2 A e^{nt}}{r^2} \left(e^{m_2 r} + e^{-m_2 r}\right) - \frac{A e^{nt}}{r^3} \left(e^{m_2 r} - e^{-m_2 r}\right),$$

$$\frac{\partial \mathfrak{y}_2}{\partial r} = A e^{nt} \left[\frac{m_2^2 \left(e^{m_2 r} - e^{-m_2 r}\right)}{r^2} - \frac{3 m_2}{r^3} \left(e^{m_2 r} + e^{-m_2 r}\right) + \frac{3}{r^4} \left(e^{m_2 r} - e^{-m_2 r}\right)\right].$$

Setzen wir nun

$$n = \alpha + \beta i, \quad m_2 = a_2 + b_2 i = \sigma_2 e^{\tau_2 i}, \tag{19}$$

so ist

$$\mathfrak{y}_2 = \frac{\sigma_2 A e^{\alpha t + (\beta t + \tau_2) i}}{r^2} \left[\left(e^{(a_2 + b_2 i) r} + e^{-(a_2 + b_2 i) r}\right)\right] - \frac{A e^{(\alpha + \beta i) t}}{r^3} \left[e^{(a_2 + b_2 i) r} - e^{-(a_2 + b_2 i) r}\right],$$

$$\frac{\partial \mathfrak{y}_2}{\partial r} = \frac{A e^{(\alpha + \beta i) t}}{r^2} \Big[\sigma_2^2 \left(e^{(a_2 + i b_2) r + 2 \tau_2 i} - e^{-(a_2 + b_2 i) r + 2 \tau_2 i}\right) - \frac{3 \sigma_2}{r} \left(e^{(a_2 + i b_2) r + \tau_2 i} + e^{-(a_2 + b_2 i) r + \tau_2 i}\right) + \frac{3}{r^2} \left(e^{(a_2 + b_2 i) r} - e^{(a_2 + b_2 i) r}\right)\Big].$$

Wenn k_2^2 klein ist, so ist bei nicht zu kleinem Werth des Moduls von n, der Modul von m, also σ, gross. Wir können dann in den Werthen von $\mathfrak{y}_2$ und $\frac{\partial \mathfrak{y}_2}{\partial \varrho}$ uns auf die ersten Glieder

beschränken und erhalten, wenn wir nur die reellen Glieder berücksichtigen, für die Oberfläche der inneren Flüssigkeit $r = R_2$ setzen und die Glieder mit dem Factor $e^{-a_2 R_2}$ vernachlässigen,

$$\mathfrak{y}_2 = \frac{\sigma_2 A e^{\alpha t + a_2 R_2}}{R_2^2} \cos(\beta t + b_2 R_2 + \tau_2), \tag{20}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{y}_2}{\partial \varrho} = \frac{\sigma_2^2 A e^{\alpha t + a_2 R_2}}{R_2^2} \cos(\beta t + b_2 R_2 + 2\tau_2).$$

Hieraus ergiebt sich also für die Grenzbedingungen 18)

$$\omega = \frac{\sigma_2 A e^{\alpha t + a_2 R_2}}{R_2^2} \left\{ \cos(\beta t + b_2 R_2 + \tau_2) + l \sigma_2 \cos(\beta t + b_2 R_2 + 2\tau_2) \right\}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich zusammenfassen in folgenden

$$\omega = \mathfrak{B}_2 e^{\alpha t} \cos(\beta t + b_2 R_2 + \tau_2 + \delta_2) \tag{21}$$

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{l_2 \sigma_2 \sin \tau_2}{1 + l_2 \sigma_2 \cos \tau_2}, \quad \mathfrak{B}_2 = \frac{\sigma_2 A e^{a_2 R_2}}{R_2^2} \sqrt{1 + l_2^2 \sigma_2^2 + 2 l_2 \sigma_2 \cos \tau_2}.$$

Aus dem gewonnenen Ausdruck der Drehungsgeschwindigkeit, der den Factor $e^{\alpha t + a_2 R} . \cos(\beta t + b_2 r)$ enthält, folgt, dass wir wellenartige Ausbreitung der Schwingungen nach dem Innern der Kugel erhalten.

Da nun nach 13) die Beziehung besteht

$$n = \frac{k^2}{s} m^2, \quad \alpha + \beta i = \frac{k_2^2}{s_2}(a_2^2 - b_2^2 + 2 a_2 b_2 i),$$

so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$\frac{\beta}{b_2} = \frac{2 a_2 k_2^2}{s_2} = 2 \sigma_2 \cos \tau_2 \frac{k_2^2}{s_2} \quad \text{nach 19)}. \tag{22}$$

Die Schwingungsdauer ist $T = \frac{2\pi}{\beta}$. Hält man durch äussere Kräfte die Amplitude constant, so dass $\alpha = 0$ ist, so ist $a_2 = b_2$, $\beta = \frac{2k_2^2}{s_2} b_2^2$ und die Wellenlänge ist gleich

$$\frac{2\pi}{b_2} = \frac{2\pi k_2 \sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta s_2}} = \frac{2 k_2 \sqrt{\pi} \sqrt{T}}{\sqrt{s_2}}.$$

Sie ist also der Quadratwurzel aus der Schwingungsdauer proportional.

Da in den vollständigen Ausdrücken noch ein Glied mit dem Factor $e^{-ar} \cos(\beta t - br + \tau)$ vorkommt, so existirt eine Welle,

welche in entgegengesetzter Richtung fortschreitet, also von innen nach aussen. Diese Welle bringt die beim Hineingehen der ersten Welle nicht ganz vernichtete Energie zurück.

Für die äussere Flüssigkeit haben wir nach 14)

$$\psi_1 = -\frac{Be^{nt-m_1 r}}{r},$$

$$\mathfrak{y}_1 = +\frac{m_1 B}{r^2} e^{nt-m_1 r} + \frac{B}{r^3} e^{nt-m_1 r},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{y}_1}{\partial r} = -\frac{m_1^2 B e^{nt-m_1 r}}{r^2} - \frac{3 m_1 B e^{nt-m_1 r}}{r^3} - \frac{3B}{r^4} e^{nt-m_1 r}$$

und weiter entsprechend 19)

$$\mathfrak{y}_1 = +\frac{B}{r^2} e^{(\alpha+\beta i)t} \left(\sigma_1 e^{\tau_1 i-(a_1+b_1 i)r} + e^{-(a_1+b_1 i)r}\right),$$

$$\frac{\partial \mathfrak{y}_1}{\partial r} = -\frac{Be^{(\alpha+\beta i)t}}{r^2} \left\{\sigma_1^2 e^{2\tau_1 i-(a_1+b_1 i)r} + \frac{3\sigma_1}{r} e^{\tau_1 i-(a_1+b_1 i)r} + \frac{3}{r^2} e^{-(a_1+b_1 i)r}\right\}. \tag{23}$$

Da l hier das entgegengesetzte Vorzeichen hat, da die Normale nach aussen gerichtet ist, so folgt hieraus an der Grenze $r = R_1$, wenn wir uns wieder auf die Glieder erster Ordnung beschränken,

$$\omega = \frac{\sigma_1 B e^{\alpha t - a_1 R_1}}{R_1^2} \left[l_1 \sigma_1 \cos(\beta t - b_1 R_1 + 2\tau_1) + \cos(\beta t - b_1 R_1 + \tau_1)\right], \tag{24}$$

der sich ebenso wie der oben erhaltene 21) zusammenfassen lässt.

Das Drehungsmoment, das von der Kugel auf das Wasser ausgeübt wird, ist

$$D = -\int dS\,(X_n y - Y_n x) = -k^2 \int dS\,(x^2 + y^2) \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \varrho}. \tag{25}$$

Ist nun ϑ der Winkel, den R mit der x-Axe bildet, so ist

$$x^2 + y^2 = R^2 \sin^2\vartheta, \quad dS = 2\pi R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta,$$
$$D = -\tfrac{8}{3}\pi k^2 R^4 \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \varrho}. \tag{25a}$$

Für den äusseren Raum ist das entgegengesetzte Vorzeichen zu wählen.

Bezeichnen wir weiter das Trägheitsmoment der schwingenden

Kugel mit K, die ablenkende Kraft, die proportional dem Ablenkungswinkel sein soll, mit $c^2\Omega$, so ist

$$K\frac{d^2\Omega}{dt^2} = -c^2\Omega + D_1 + D_2, \tag{25b}$$

wo D_1 und D_2 die Drehungsmomente sind, die die äussere und innere Flüssigkeit auf die Kugel ausübt.

Die Erfüllung dieser Gleichung ergiebt zwei neue Gleichungen, durch welche σ_2 und τ_2 und damit $\frac{k_2^2}{s_1}$ und l_2 bestimmt sind. Die Constanten $\frac{k_1^2}{s_1}$ und l_1 setzen wir als bekannt voraus.

Wir hatten nun folgende Beziehungen nach 13) und 19)

$$n = \frac{k^2}{s}m^2 = \alpha + \beta i,$$

$$m_2 = a_2 + b_2 i = \sigma_2 e^{\tau_2 i}, \quad m_1 = a_1 + b_1 i = \sigma_1 e^{\tau_1 i},$$

also

$$\alpha + \beta i = \frac{k^2}{s}\sigma^2 e^{2\tau i}.$$

Der Drehungswinkel ω ist nun derselbe und durch 21) und 24) zweimal ausgedrückt.

Wir haben also

$$\mathfrak{B}_2 e^{\alpha t}\cos(\beta t + b_2 R_2 + \tau_2 + \delta_2)$$
$$= \mathfrak{B}_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t - b_1 R_1 + \tau_1 + \delta_1 + \varepsilon).$$

ε ist die Phasenänderung, die wir hinzufügen müssen, damit Uebereinstimmung in der Phase stattfindet; ε bestimmt sich aus der Gleichung

$$b_2 R_2 + \tau_2 + \delta_2 = -b_1 R_1 + \tau_1 + \delta_1 + \varepsilon. \tag{26}$$

Ausserdem ist

$$\alpha + \beta i = \frac{k_2^2}{s_2}m_2^2 = \frac{k_1^2}{s_1}m_1^2.$$

Ferner folgt $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2$, also haben wir

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{B}_2 &= \frac{\sigma_2 A e^{a_2 R_2}}{R_2^2}\sqrt{1 + l_2^2\sigma_2^2 + 2 l_2\sigma_2\cos\tau_2}\\ = \mathfrak{B}_1 &= \frac{\sigma_1 e^{-a_1 R_1}}{R_1^2} B\sqrt{1 + l_1^2\sigma_1^2 + 2 l_1\sigma_1\cos\tau_1}.\end{aligned}\right\} \tag{26a}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\delta_2 &= \frac{l_2\,\sigma_2 \sin\tau}{1 + l_2\,\sigma_2 \cos\tau}, \\ \operatorname{tg}\delta_1 &= \frac{l_1\,\sigma_1 \sin\tau}{1 + l_1\,\sigma_1 \cos\tau}, \end{aligned}\right\} \;27)\qquad \begin{aligned} &\frac{k_1^2}{s_1}\,\sigma_1^2\, e^{2\tau_1 i} = \frac{k_2^2\,\sigma_2^2\, e^{2\tau_2 i}}{s_2}, \\ &\text{also } \tau_1 = \tau_2,\ \frac{k_1^2}{s_1}\sigma_1^2 = \frac{k_2^2}{s_2}\sigma_2^2, \quad 29) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{k_2^2}{s_2}\,\sigma_2^2 \cos 2\tau, \\ \beta &= \frac{k_2^2}{s_2}\,\sigma_2^2 \sin 2\tau, \end{aligned}\right\} \;28)$$

$$\left.\begin{aligned} b_2 &= \sigma_2 \sin\tau, \\ b_1 &= \sigma_1 \sin\tau, \end{aligned}\right\} \;28\text{a})\qquad \left.\begin{aligned} a_2 &= \sigma_2 \cos\tau, \\ a_1 &= \sigma_1 \cos\tau. \end{aligned}\right\} \;30)$$

Wir haben für den Drehungswinkel Ω der Kugel

$$\omega = \frac{\partial\Omega}{\partial t} = \mathfrak{B}\, e^{\alpha t} \cos(\beta t + b_2 R_2 + \tau + \delta_2) = 0,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} = \frac{\sigma_2^2\, k_2^2}{s_2}\,\mathfrak{B} e^{\alpha t} \cos(\beta t + b_2 R_2 + 3\tau + \delta_2),$$

$$\Omega = \frac{s_2}{\sigma_2^2\, k_2^2}\,\mathfrak{B}\, e^{\alpha t} \cos(\beta t + b_2 R_2 - \tau + \delta_2).$$

Setzen wir diese Ausdrücke und die für D_1 und D_2 in die Differentialgleichung 27) und zerlegen die Glieder so, dass sie den Factor $\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}(\beta t + b_2 R_2 + \tau i)$ enthalten, so erhalten wir mit Berücksichtigung von 26) zwei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \left[K\frac{\sigma_2^2\, k_2^2}{s_2} + \frac{c^2 s_2}{\sigma_2^2\, k_2^2}\right]\mathfrak{B}\cos 2\tau &= -\tfrac{8}{3}\pi\left\{A\, k_2^2\,\sigma_2^2\, R_2^2\, e^{a_2 R_2}\cos(\tau - \delta_2)\right. \\ &\qquad \left. - B\, k_1^2\,\sigma_1^2\, R_1^2\, e^{-a_1 R_1}\cos(\tau - \delta_1)\right\} \\ \left[-\frac{K\,\sigma_2^2\, k_2^2}{s_2} + \frac{c^2 s_2}{\sigma_2^2\, k_2^2}\right]\mathfrak{B}\sin 2\tau &= \tfrac{8}{3}\pi\left\{A\, k_2^2\,\sigma_2^2\, R_2^2\, e^{a_2 R_2}\sin(\tau - \delta_2)\right. \\ &\qquad \left. - B\, k_1^2\,\sigma_1^2\, R_1^2\, e^{-a_1 R_1}\sin(\tau - \delta_1)\right\}. \end{aligned}\right\} \;31)$$

Die Grössen $K, c, R_1, R_2, \frac{k_1^2}{s_1}, l_1$ setzen wir als bekannt voraus.

Unbekannt sind die 6 Grössen δ, σ, a mit dem Index 1 und 2 und $\tau, \frac{k_2^2}{s_2}, l_2, A, B, \alpha, \beta, \mathfrak{B}$, im Ganzen 14 Grössen. Zu ihrer Bestimmung sind je zwei Gleichungen 26a), 27), 28), 30), 31) und Gleichung 29), zusammen 11 Gleichungen vorhanden. Drei Grössen müssen durch Beobachtung bestimmt werden, die Schwingungs-

dauer $\frac{2\pi}{\beta}$, das logarithmische Dekrement $-\alpha T$ und die Amplitude $\frac{\mathfrak{B}\, s_2}{\sigma_2^2\, k_2^2}$.

Wir betrachten jetzt eine Kugel, die in einer reibenden Flüssigkeit ohne Gleitung langsame Schwingungen auf einer geraden Linie ausführt.

Wir setzen

$$u = \frac{\partial^2 (U+V)}{\partial x\, \partial z}, \quad v = \frac{\partial^2 (U+V)}{\partial y\, \partial z}, \quad w = -\frac{\partial^2 (U+V)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 (U+V)}{\partial y^2}, \tag{32}$$

so ist die Continuitätsgleichung identisch erfüllt, ferner

$$p = -s\, \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial t}.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichungen 3), so erhalten wir

$$\Delta U = 0, \qquad s\, \frac{\partial V}{\partial t} = k^2 \Delta V. \tag{33}$$

Wenn U und V nur Functionen von r sind, so ist

$$\begin{aligned} u &= \frac{xz}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (U+V)}{\partial r} \right), \\ v &= \frac{yz}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (U+V)}{\partial r} \right), \\ w &= -\frac{x^2+y^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (U+V)}{\partial r} \right) - \frac{2}{r} \frac{\partial (U+V)}{\partial r}, \\ p &= -s\, \frac{z}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r\, \partial t}. \end{aligned} \tag{34}$$

Wenn für $r = R$ die Grösse

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (U+V)}{\partial r} \right) \tag{35}$$

verschwindet, so ist dort

$$u = v = 0, \qquad w = -\frac{2}{r} \frac{\partial (U+V)}{\partial r}.$$

Den Gleichungen 33) genügen wir durch

$$U = \frac{A e^{nt}}{r}, \qquad V = \frac{B e^{nt+mr}}{r}, \tag{36}$$

wenn

$$m^2 = \frac{sn}{k^2} \text{ ist.}$$

Die Drucke, welche die Kugel auf die Flüssigkeit ausübt, sind in der Richtung der z-Axe

$$Z = \int dS\,(Z_x \cos rx + Z_y \cos ry + Z_z \cos rz),$$

$$= \int \frac{dS}{r}\left\{zp - k^2\left[x\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + y\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + 2z\,\frac{\partial w}{\partial z}\right]\right\}.$$

Setzen wir hierin die Werthe für u, v, w und integriren über die Kugelfläche, so erhalten wir

$$Z = \frac{4\pi}{3} R^2 \left\{2k^2 R \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial(U+V)}{\partial r}\right) - s\,\frac{\partial^2 U}{\partial r\,\partial t}\right\}_{r=R}.$$

Mit Rücksicht auf die Bedingung 35) für $r = R$ und die Gleichung $m^2 = \frac{sn}{k^2}$ ergiebt sich

$$\frac{3Ae^{nt}}{R^2} = -Be^{nt+mR}\left(\frac{3}{R^2} - \frac{3m}{R} + m^2\right),$$

und
$$Z = e^{nt+mR}\,\frac{4\pi}{9}\,k^2 m^2 B\,(9Rm - 9 - m^2R^2).$$

Nehmen wir für die Kugel die Differentialgleichung der Bewegung eines Pendels für sehr kleine Amplituden an, so ergiebt sich für diese

$$M\frac{d^2z}{dt^2} = -c^2 z - Z. \qquad 37)$$

Hier ist $c^2 = \frac{gM^2L}{K}$, wenn keine Luft vorhanden ist, wo M die Masse der Kugel, L den Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsaxe, K das Trägheitsmoment bezeichnen.

Setzen wir die erhaltenen Werthe in die Gleichung 37) ein und berücksichtigen, dass

$$\frac{dz}{dt} = w_{r=R}$$

ist, so erhalten wir

$$\frac{Mk^4m^4}{s^2} + c^2 - \frac{2\pi}{3}\,\frac{k^4m^2R}{s}\,(9Rm - 9 - m^2R^2) = 0. \qquad 38)$$

Die Schwingungen der Kugel sollen einfach periodisch sein. Dann ist

$$n = \alpha + \beta i$$

zu setzen. Setzen wir

$$\tfrac{4}{3}\pi R^3 s = M',$$

der Masse der verdrängten Flüssigkeit, so ist für $k^2 = 0$

$$n^2 \left(M + \frac{M'}{2}\right) + c^2 = 0 .$$

Ohne Reibung, durch das Anhaften der Flüssigkeit an der Oberfläche, wird die Wirkung die sein, als ob die Masse des Pendels um $\frac{M'}{2}$ vergrössert wäre. Dann folgt

$$\sqrt{n} = \sqrt[4]{\frac{c^2}{M + \frac{M'}{2}}} \left\{\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Berücksichtigen wir bei kleinen Werthen von k^2 in der Gleichung 38) noch das Glied mit β^3, so erhalten wir

$$M\sqrt{n^4} + c^2 + \frac{2\pi}{3}\sqrt{n^4}\, sR^3 - 6\pi\sqrt{n^3}\, R^2 k\sqrt{s} = 0 .$$

Nach dem Newton'schen Näherungsverfahren ergiebt sich, wenn nur Glieder erster Ordnung berücksichtigt werden,

$$\sqrt{n} = \mathfrak{B}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) + \frac{3\pi R^2 k\sqrt{s}}{2M + M'}, \qquad \mathfrak{B}^4 = \frac{c^2}{M + \frac{M'}{2}},$$

$$n = -\frac{\mathfrak{B}^2}{\sqrt{2}}\,\frac{6\pi R^2 k\sqrt{s}}{2M + M'}(1+i) + \mathfrak{B}^2 i = \alpha + \beta i.$$

Nun ist die Schwingungsdauer ohne Reibung $T_0 = \frac{2\pi}{\mathfrak{B}^2}$. Die durch Reibung veränderte Schwingungsdauer beträgt

$$T = \frac{2\pi}{\beta} = T_0\left(1 + \frac{9}{4R}\,\frac{k}{\sqrt{s}}\,\frac{M'}{2M + M'}\sqrt{\frac{T_0}{\pi}}\right)$$

und das logarithmische Dekrement beträgt 39)

$$-\alpha T = \frac{9}{2R}\,\frac{k}{\sqrt{s}}\,\frac{M'}{2M + M'}\sqrt{T_0 \pi} .$$

§ 2.

Der Cylinder.

Wir führen zunächst in die allgemeinen Differentialgleichungen cylindrische Coordinaten ein, indem wir setzen

$$x = \varrho\cos\vartheta, \quad y = \varrho\sin\vartheta, \quad \frac{d\varrho}{dt} = \mathfrak{r}, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \mathfrak{y} .$$

Dann ergiebt sich für nicht zusammendrückbare Flüssigkeiten

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial\varrho} &= \frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial t} + \mathfrak{r}\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial\varrho} + \mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial\vartheta} + w\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial z} - \varrho\mathfrak{y}^2 \\
&\quad - \frac{k^2}{s}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial\varrho^2} + \frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{\mathfrak{r}}{\varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial\vartheta^2} - \frac{2}{\varrho}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial\vartheta} + \frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial z^2}\right) \\
-\frac{1}{s}\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial p}{\partial\vartheta} &= \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t} + \mathfrak{r}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial\varrho} + \mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial\vartheta} + w\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial z} + \frac{2\mathfrak{r}\mathfrak{y}}{\varrho} \\
&\quad - \frac{k^2}{s}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial\varrho^2} + \frac{3}{\varrho}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial\vartheta^2} + \frac{2}{\varrho^3}\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial\vartheta} + \frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial z^2}\right) \qquad 40) \\
-\frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial t} + \mathfrak{r}\frac{\partial w}{\partial\varrho} + \mathfrak{y}\frac{\partial w}{\partial\vartheta} + w\frac{\partial w}{\partial z} \\
&\quad - \frac{k^2}{s}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right).
\end{aligned}$$

Die Continuitätsgleichung wird

$$\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial\varrho} + \frac{\mathfrak{r}}{\varrho} + \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial\vartheta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \qquad 41)$$

Die Componenten der Drehungsgeschwindigkeit um Axen, die den Richtungen der Coordinaten parallel sind, werden

$$\varrho\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial\varrho} + 2\mathfrak{y} - \frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial\vartheta}\frac{1}{\varrho}, \qquad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial\vartheta} - \varrho\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial z}, \qquad \frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial\varrho}, \qquad 42)$$

die der Druckkräfte parallel den Richtungen der Coordinaten

$$\begin{aligned}
R_\varrho &= p - 2k^2\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial\varrho}, & R_\vartheta &= -k^2\left(\varrho\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial\vartheta}\right), \\
\Theta_\vartheta &= p - 2k^2\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial\vartheta} + \frac{\mathfrak{r}}{\varrho}\right), & Z_\vartheta &= -k^2\left(\varrho\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial z} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial\vartheta}\right), \qquad 43) \\
Z_z &= p - 2k^2\frac{\partial w}{\partial z}, & Z_\varrho &= -k^2\left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial\varrho}\right).
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich der Fall, wo die Gleichungen vollständig integrabel sind, wenn die Grössen nur von der Coordinate ϱ und t abhängen. Dann ist

$$\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial\varrho} = -\frac{\mathfrak{r}}{\varrho}, \quad \text{also } \mathfrak{r} = \frac{c}{\varrho},$$

wo c eine Constante bezeichnet. Ferner

$$0 = \frac{c}{\varrho}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial\varrho} + \frac{2c}{\varrho^2}\mathfrak{y} - \frac{k^2}{s}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial\varrho^2} + \frac{3}{\varrho}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial\varrho}\right) + \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t},$$

$$-\frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial z} = c_1 = \frac{c}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial \varrho} - \frac{k^2}{s}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial \varrho}\right) + \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$-\frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial \varrho} = -\frac{c^2}{\varrho^3} - \varrho \mathfrak{y}^2 + \frac{1}{\varrho}\frac{dc}{dt};$$

c_1 ist ebenfalls eine Constante.

Beschränkt sich die Abhängigkeit bei $\mathfrak{y}$ von t auf den Factor e^{-nt}, bei w auf den Factor $e^{-n_1 t}$, so haben wir die Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\mathfrak{y}}{d\varrho^2} + \frac{\left(3 - \frac{sc}{k^2}\right)}{\varrho}\frac{d\mathfrak{y}}{d\varrho} - \left(\frac{2cs}{k^2\varrho^2} - \frac{s}{k^2}n\right)\mathfrak{y} = 0, \\ &\frac{d^2 w}{d\varrho^2} + \frac{\left(1 - \frac{sc}{k^2}\right)}{\varrho}\frac{dw}{d\varrho} + \frac{sn_1}{k^2}w = -\frac{c_1 s}{k^2} = \frac{\partial p}{\partial z}\frac{1}{k^2}, \end{aligned}\right\} \quad 44)$$

die durch allgemeine Bessel'sche Functionen integrirt werden.

Ist c von Null verschieden, so wird $\mathfrak{r}$ für $\varrho = 0$ discontinuirlich, dort findet Ein- oder Ausströmen der Flüssigkeit statt.

Ist $c_1 = c = 0$, so wird

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{y} &= \left[\mathfrak{A}\, J_1\left(\varrho \frac{\sqrt{ns}}{k}\right) + \mathfrak{B}\, \mathfrak{J}_1\left(\varrho\frac{\sqrt{ns}}{k}\right)\right] e^{-nt}, \\ w &= \left[\mathfrak{A}_1 J_0\left(\varrho\frac{\sqrt{n_1 s}}{k}\right) + \mathfrak{B}_1 \mathfrak{J}_0\left(\varrho\frac{\sqrt{n_1 s}}{k}\right)\right] e^{-n_1 t}, \end{aligned}\right\} \quad 45)$$

wo die $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ Constanten und die Bessel'schen Functionen

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{ix\cos\varphi}\sin^{2\alpha}\varphi\, d\varphi,$$

$$\mathfrak{J}_\alpha(x) = \int_0^\infty e^{ix\cos i\varphi}\sin^{2\alpha} i\varphi\, d\varphi \quad \text{sind.}$$

Für $\varrho = 0$ bleiben nur die Functionen J endlich.

Handelt es sich also um einen mit Flüssigkeit gefüllten Cylinder, so sind $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ gleich Null zu setzen. Man kann also für $\varrho = R$ die Werthe von $\mathfrak{y}$ und w vorschreiben und erhält die Bewegung einer Flüssigkeit innerhalb eines unbegrenzten Cylinders, der periodische Schwingungen sowohl parallel der z-Axe als drehende um diese Axe ausführt.

Dann ist zweckmässig für J die Reihenentwicklung zu benutzen

$$J_{\mathfrak{a}}(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2(2\mathfrak{a}+2)} + \frac{x^4}{2.4(2\mathfrak{a}+2)(2\mathfrak{a}+4)} - \dots\right). \qquad 46)$$

Da n complex ist, erhält man, wenn wieder $n = \alpha + i\beta$ gesetzt wird, für $\varrho = R$

$$J_{\mathfrak{a}}\left(\frac{R\sqrt{ns}}{k}\right) = \left(1 - \frac{R^2(\alpha + i\beta)s}{2(2\mathfrak{a}+2)k^2} + \frac{R^4(\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i)s^2}{2.4(2\mathfrak{a}+2)(2\mathfrak{a}+4)k^4} + \dots\right). \qquad 47)$$

Nehmen wir $w = 0$ an, sodass nur drehende Schwingungen vorhanden sind, so ist bei Beschränkung auf die reellen Glieder, wenn der Gleitungscoefficient $l = 0$ ist,

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{A}e^{-\alpha t}\left[\left(1 - \frac{R^2\alpha s}{2.4.k^2} + \frac{R^4(\alpha^2 - \beta^2)s^2}{2.4.4.6.k^4}\dots\right)\cos\beta t\right.$$
$$\left.- \left(\frac{R^2\beta s}{2.4.k^2} - \frac{2R^4\alpha\beta s^2}{2.4.4.6.k^4}\dots\right)\sin\beta t\right].$$

Ist K das Trägheitsmoment des unendlichen Cylinders für die Längeneinheit, so ist, wenn Ω der Drehungswinkel des Cylinders ist,

$$\mathfrak{y} = \frac{d\Omega}{dt} \text{ für } \varrho = R \text{ und}$$

$$K\frac{d^2\Omega}{dt^2} = -c^2\Omega + D,$$

wo D der Drehungsmoment der reibenden Flüssigkeit ist.

Es ist nach 43) $D = -2R^2\pi R_\vartheta$

$$D = -2R^3\pi k^2 \frac{d\mathfrak{y}}{d\varrho}.$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen, wenn wir uns auf die angegebenen Glieder der Reihe beschränken,

$$0 = \left(1 - \frac{R^2\alpha s}{8k^2} + \frac{R^4(\alpha^2 - \beta^2)s^2}{192k^4}\right)[K(\alpha^2 - \beta^2) + c^2]$$
$$+ \frac{R^2\beta^2\alpha s K}{4k^2} - \frac{R^4\alpha^2\beta^2 K s^2}{48k^4} + R^4\pi k^2\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} - \frac{R^2(\alpha^3 - 3\alpha\beta^2)s}{24k^2}\right)$$
$$\qquad 48)$$
$$0 = \left(1 - \frac{R^2\alpha s}{8k^2} + \frac{R^4(\alpha^2 - \beta^2)s^2}{192k^4}\right)2K\alpha\beta$$
$$- \frac{sR^2\beta}{8k^2}[K(\alpha^2 - \beta^2) + c^2]\left(1 - \frac{R^2\alpha s}{12k^2}\right) + R^4\pi k^2\beta\left(\alpha - \frac{R^2(3\alpha^2 - \beta^2)s}{24k^2}\right).$$

In dem betrachteten Falle sind keine Vernachlässigungen gemacht, und man kann die Rechnung durch Benutzung weiterer Glieder der Reihe bis zu jeder Genauigkeit treiben, ohne an sehr kleine Geschwindigkeiten gebunden zu sein. Praktisch stehen der Anwendung sehr langer Cylinder, bei denen die Wirkung der Endflächen vernachlässigt werden kann, erhebliche Schwierigkeiten entgegen.

Ist in 44) $c = 0$, $n_1 = 0$ und $\mathfrak{y} = 0$, so haben wir die Differentialgleichung bei stationärer Bewegung

$$\frac{d^2 w}{d\varrho^2} + \frac{dw}{d\varrho}\frac{1}{\varrho} = -\frac{s}{k^2} c_1 = \frac{1}{k^2}\frac{dp}{dx} = c_1'. \tag{49}$$

Hieraus folgt

$$w = \tfrac{1}{4} c_1' \varrho^2 + A \log \varrho + B. \tag{50}$$

Wir haben Strömung parallel der z-Axe.

Nun ist nach 26) Abschnitt I

$$X_x = p,\ Y_y = p,\ Z_z = p,\ X_y = 0,\ Z_y = -k^2 \frac{\partial w}{\partial y},\ X_z = -k^2 \frac{\partial w}{\partial x},$$

also, da die Normale parallel ϱ, $\cos nz = 0$ ist,

$$X_n = p \cos nx, \qquad Y_n = p \cos ny, \qquad Z_n = 0,$$

und

$$X_n \cos nx + Y_n \cos ny = p.$$

Setzen wir in den Grenzbedingungen 29) Abschnitt I

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0,$$

so sind die ersten beiden, da $u = v = 0$ ist, identisch erfüllt.

Die dritte giebt, da $Z_\varrho = -k^2 \frac{dw}{d\varrho}$ ist,

$$\frac{dw}{d\varrho} = \frac{1}{l} w.$$

Die strömende Flüssigkeit denken wir uns von zwei parallelen Cylinderflächen mit den Radien R_1 und R_2 begrenzt.

Wir haben dann nach 50)

$$\frac{dw}{d\varrho} = \frac{c_1' \varrho}{2} + \frac{A}{\varrho}.$$

An der inneren Cylinderfläche ist die nach der Flüssigkeit gerichtete Normale parallel ϱ. Die Grenzbedingung giebt also dort

$$\tfrac{1}{4}c_1'R_1^2 + A\log R_1 + B = l\left(\frac{c_1'R_1}{2} + \frac{A}{R_1}\right). \qquad 51)$$

An der äusseren Cylinderfläche ist die Normale parallel $-\varrho$. Dort haben wir

$$\tfrac{1}{4}c_1'R_2^2 + A\log R_2 + B = -l\left(\frac{c_1'R_2}{2} + \frac{A}{R_2}\right). \qquad 51a)$$

Bei den Versuchen kommt es auf die in der Zeiteinheit durch die Röhre strömende Flüssigkeitsmenge an, wenn die Druckdifferenz an der Ein- und Ausströmungsstelle gegeben ist. Die Constante c_1' bestimmt sich durch diese Druckdifferenz, da durch sie das Druckgefälle gemessen wird. Ist die Länge der Röhre L, so ist nach 49)

$$c_1' = \frac{p_L - p_0}{Lk^2}$$

und die durchströmende Flüssigkeitsmenge in der Zeiteinheit

$$Q = 2\pi\int_{R_1}^{R_2} w\varrho\, d\varrho\,.$$

Eliminiren wir A und B aus den beiden durch die Grenzbedingungen gelieferten Gleichungen 51) und 51a) und führen die Integration aus, so ergiebt sich

$$Q = -\frac{\pi(p_0 - p_L)}{Lk^2}\left\{\frac{R_2^4 - R_1^4}{8}\right.$$

$$-\frac{\tfrac{1}{2}(R_2^2 - R_1^2) + l(R_1 + R_2)}{\log\frac{R_2}{R_1} + l\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}\left[\frac{R_2^2}{2}\log\frac{R_2}{R_1} - \left(\frac{1}{4} - \frac{l}{2R_1}\right)(R_2^2 - R_1^2)\right] \qquad 52)$$

$$\left.+\left(\frac{lR_1}{2} - \frac{R_1^2}{4}\right)(R_2^2 - R_1^2)\right\}.$$

Ist $l = 0$, also keine Gleitung vorhanden, so haben wir

$$Q = \frac{\pi}{8Lk^2}(p_0 - p_L)\left\{R_2^4 - R_1^4 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\log\frac{R_2}{R_1}}\right\}. \qquad 53)$$

Ist $R_1 = 0$, so wird

$$Q = \frac{\pi(p_0 - p_L)}{8hk^2}\left\{R_2^4 + 4\,lR_2^3\right\}. \qquad 54)$$

Wenn wir zur Betrachtung eines endlichen, mit Flüssigkeit gefüllten, Cylinders übergehen, so müssen wir in den Differential-

gleichungen die quadratischen Glieder vernachlässigen. Wir beschränken uns auf drehende Schwingungen und setzen $l = 0$.

Wenn die quadratischen Glieder vernachlässigt werden und alle Grössen von ϑ unabhängig sind, so können wir in 40) $\mathfrak{r} = w = 0$ setzen und behalten die Gleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t} = \frac{k^2}{s}\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial \varrho^2} + \frac{3}{\varrho}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial z^2}\right). \tag{55)}$$

Der Anfangspunkt des Coordinatensystems liege in der Mitte des Cylinders, sodass $z = \pm h$ die Endflächen sind.

Die Flüssigkeit soll nun das Innere des Cylinders erfüllen und keine Gleitung an den Wänden stattfinden.

Der Differentialgleichung 55) genügt die Lösung

$$\mathfrak{y} = (A \cos mz + B \sin mz)\, J_1 e^{-nt}, \tag{56)}$$

wenn

$$\frac{d^2 J_1}{d\varrho^2} + \frac{3}{\varrho}\frac{dJ_1}{d\varrho} + p^2 J_1 = 0, \tag{56a)}$$

$$\frac{ns}{k^2} - m^2 = p^2 \quad \text{ist.} \tag{57)}$$

J_1 ist wieder die Bessel'sche Function, die für $\varrho = 0$ endlich bleibt.

Nun muss $\mathfrak{y}$ für $\varrho = R$ und $z = \pm h$ unabhängig von ϱ und z werden, wenn die oberflächlichste Schicht fest an der Wand haften soll, also keine Gleitung stattfindet.

Zu dem Zwecke muss nach bekannten Analogieen $\mathfrak{y}$ in eine trigonometrische Reihe entwickelt werden.

Wir setzen

$$e^{nt}\mathfrak{y} = A\frac{\cos qz}{\cos qh} + A\sum_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{a}} \sin\left(\frac{2\mathfrak{a}-1}{2}\,\frac{h-z}{h}\,\pi\right)\cdot\frac{J_1(p_{\mathfrak{a}}\varrho)}{J_1(p_{\mathfrak{a}}R)}, \tag{58)}$$

$$\mathfrak{a} = 1, 2, 3 \ldots \infty.$$

Für $z = \pm h$ haben wir $e^{nt}\mathfrak{y} = A$. Es muss aber auch $e^{nt}\mathfrak{y} = A$ für $\varrho = R$ sein. Dies ist der Fall, wenn

$$1 - \frac{\cos qz}{\cos qh} = \sum_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{a}} \sin\left(\frac{2\mathfrak{a}-1}{2}\,\frac{h-z}{h}\,\pi\right) \quad \text{ist.}$$

Bestimmen wir nach den Regeln der Fourier'schen Integrale die Coefficienten, so ist

$$a_{\mathfrak{a}} = \frac{1}{(2\mathfrak{a}-1)\pi}\cdot\frac{16 q^2 h^2}{4q^2h^2 - (2\mathfrak{a}-1)^2\pi^2}. \tag{58a)}$$

Aus der Differentialgleichung folgt

$$q^2 = \frac{ns}{k^2}, \quad p_\mathfrak{a}^2 = \frac{ns}{k^2} - \left(\frac{2\mathfrak{a}-1}{2}\frac{\pi}{h}\right)^2 = q^2 - \left(\frac{2\mathfrak{a}-1}{2}\frac{\pi}{h}\right)^2. \tag{58b}$$

Daher ist

$$a_\mathfrak{a} = \frac{4}{(2\mathfrak{a}-1)\pi}\frac{q^2}{p_\mathfrak{a}^2}.$$

Nach 27) und 43) ist nun die Bewegungsgleichung des cylindrischen Gefässes, wenn wieder Ω den Drehungswinkel, K das Trägheitsmoment und $c^2\Omega$ das Drehungsmoment bezeichnen,

$$K\frac{d^2\Omega}{dt^2} = -c^2\Omega - 2\pi k^2 \left\{R^3\int_{-h}^{h}\left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \varrho}\right) dz_{\varrho=R}\right.$$

$$\left. + \int_0^R \varrho^3 d\varrho \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z}\right)_{z=h} - \left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z}\right)_{z=h}\right]\right\}.$$

Nun ist wieder

$$\frac{d\Omega}{dt} = \mathfrak{y}_{\varrho=R},$$

also haben wir

$$0 = Kn + \frac{c^2}{n} + \pi k^2 R^4 q \operatorname{tg} qh$$

$$-2\pi k^2 \sum_\mathfrak{a}\left[\frac{a_\mathfrak{a}}{J(p_\mathfrak{a}R)}\left(\frac{4hR^3}{(2\mathfrak{a}-1)\pi}J'(p_\mathfrak{a}R) - \frac{(2\mathfrak{a}-1)\pi}{h}\int_0^R \varrho^3 J_1(p_\mathfrak{a})\varrho d\varrho\right)\right]. \tag{59}$$

Nun folgt aus der Differentialgleichung 56a)

$$p^2 J_1(p\varrho) = -\frac{1}{\varrho^3}\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho^3\frac{dJ_1(p\varrho)}{d\varrho}\right) = -\frac{1}{\varrho^3}\frac{d}{d\varrho}\left[\varrho^3 J_1'(p\varrho)\right],$$

also

$$\int_0^R \varrho^3 J_1(p\varrho)\,d\varrho = -\frac{R^3}{p^2}J_1'(pR).$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man das Integral in die Bewegungsgleichung 59) einsetzt, bei Berücksichtigung von 58a) und 58b)

$$0 = Kn + \frac{c^2}{n} + \pi k^2 R^4 q \operatorname{tg} qh - 2\pi k^2 h R^3 \sum_\mathfrak{a} a_\mathfrak{a}^2 \frac{J_1'(pR)}{J_1(pR)}. \tag{60}$$

Wir setzen nun

$$n = \alpha + \beta i, \qquad p_\mathfrak{a} = \sigma_\mathfrak{a} + \tau_\mathfrak{a} i,$$

$$q = \gamma + \varepsilon i = \frac{\sqrt{s}}{k}\left\{\sqrt{\frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}\right\}$$

und nehmen an, dass der Werth von pR gross gegen die Einheit ist.

Aus der Theorie der Bessel'schen Functionen folgt, dass für $p\varrho = \infty$

$$-\sqrt{\pi p_\mathfrak{a}\varrho}\, J_1(p_\mathfrak{a}\varrho) = \cos p_\mathfrak{a}\varrho - \sin p_\mathfrak{a}\varrho \quad \text{ist, also}$$

$$-\sqrt{\pi p_\mathfrak{a}\varrho}\, J_1'(p_\mathfrak{a}\varrho) = -p_\mathfrak{a}(\sin p_\mathfrak{a}\varrho + \cos p_\mathfrak{a}\varrho) \text{ für } p_\mathfrak{a}\varrho = \infty.$$

Es ist also

$$\frac{J_1'(p_\mathfrak{a}\varrho)}{J_1(p_\mathfrak{a}\varrho)} = p_\mathfrak{a}\frac{\sin p_\mathfrak{a}\varrho + \cos p_\mathfrak{a}\varrho}{\sin p_\mathfrak{a}\varrho - \cos p_\mathfrak{a}\varrho} = p_\mathfrak{a}\frac{\operatorname{tg} p_\mathfrak{a}\varrho + 1}{\operatorname{tg} p_\mathfrak{a}\varrho - 1}.$$

Nun ist

$$\operatorname{tg} p_\mathfrak{a} R = \operatorname{tg}(\sigma_\mathfrak{a} + \tau_\mathfrak{a} i) R = i,$$

wenn $e^{-2\tau R}$ gegen Eins vernachlässigt werden darf. Also ist

$$\frac{J_1'(p_\mathfrak{a} R)}{J_1(p_\mathfrak{a} R)} = -ip_\mathfrak{a} \quad \text{für } p_\mathfrak{a} R = \infty.$$

Wir haben also schliesslich die Gleichung, da auch $\operatorname{tg} qh = i$ gesetzt werden kann, wenn die Grösse $e^{-2\varepsilon h}$ gegen Eins vernachlässigt wird,

$$\begin{aligned} 0 = K(\alpha+\beta i) + \frac{c^2(\alpha-\beta i)}{\alpha^2+\beta^2} + \pi k^2 R^4(\gamma i - \varepsilon) \\ + 32\, R^3 hs \sum_\mathfrak{a} \frac{(\alpha+\beta i)(\sigma_\mathfrak{a}+\tau_\mathfrak{a} i)\left[\frac{s}{k^2}\alpha - \left(\frac{2\mathfrak{a}-1}{2}\frac{\pi}{h}\right)^2 + \frac{2is\beta}{k^2}\right]}{(2\mathfrak{a}-1)^2\pi(\sigma_\mathfrak{a}^2+\tau_\mathfrak{a}^2)^2}. \end{aligned} \tag{61}$$

Es ergeben sich also schliesslich zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 = K\alpha + \frac{c^2\alpha}{\alpha^2+\beta^2} - \pi k R^4 \sqrt{s}\sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} \\ + 32\, R^3 hs \sum_\mathfrak{a} \frac{(\alpha\sigma_\mathfrak{a} - \beta\tau_\mathfrak{a})\left[\frac{s}{k^2}\alpha - \left(\frac{2\mathfrak{a}-1}{2}\frac{\pi}{h}\right)^2\right] - (\beta\sigma_\mathfrak{a}+\alpha\tau_\mathfrak{a})\frac{2s\beta}{k^2}}{(2\mathfrak{a}-1)^2\pi(\sigma_\mathfrak{a}^2+\tau_\mathfrak{a}^2)^2}, \end{aligned} \tag{62}$$

$$0 = K\beta - \frac{c^2\beta}{\alpha^2+\beta^2} + \pi k R^4 \sqrt{s}\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}$$

$$+ 32\, R^3 h s \sum_{\mathfrak{a}} \frac{(\beta\sigma_{\mathfrak{a}} + \alpha\tau_{\mathfrak{a}})\left[\frac{s}{k^2}\alpha - \left(\frac{2\mathfrak{a}-1}{2}\frac{\pi}{\alpha}\right)^2\right] + (\alpha\sigma_{\mathfrak{a}} - \beta\tau_{\mathfrak{a}})\frac{2s\beta}{k^2}}{(2\mathfrak{a}-1)^2\pi(\sigma_{\mathfrak{a}}^2+\tau_{\mathfrak{a}}^2)^2}$$

und zwar ist

$$\sigma_{\mathfrak{a}} = \sqrt{\frac{\frac{s\alpha}{k^2} - \left(\frac{2\mathfrak{a}-1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{h^2} + \sqrt{\left[\frac{s\alpha}{k^2} - \left(\frac{2\mathfrak{a}-1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{h^2}\right]^2 + \frac{s^2}{k^4}\beta^2}}{2}}$$

$$\tau_{\mathfrak{a}} = \sqrt{\frac{-\frac{s\alpha}{k^2} + \left(\frac{2\mathfrak{a}-1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{h^2} + \sqrt{\left[\frac{s\alpha}{k^2} - \left(\frac{2\mathfrak{a}-1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{h^2}\right]^2 + \frac{s^2}{k^4}\beta^2}}{2}} \quad 63)$$

Aus der Gleichung für die Bewegung des Gefässes

$$\mathfrak{y} = Ae^{-nt} = Ae^{-(\alpha+\beta i)t}$$

folgt, dass

$\frac{2\pi}{\beta} = T$ die Schwingungsdauer und

αT das logarithmische Dekrement ist.

§ 3.

Einfluss der Reibung auf die Wellenbewegung.

Wenn die Bewegung parallel einer Ebene xy vor sich geht, werden die Gleichungen 1), wenn die Flüssigkeit nicht zusammendrückbar ist, da die Continuitätsgleichung die Gleichungen $u = \frac{\partial\psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$ verlangt,

$$-\frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{k^2}{s}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\psi$$

$$g - \frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + \frac{k^2}{s}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi \quad 64)$$

und nach Elimination von p

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} - \frac{k^2}{s}\Delta\Delta\psi = 0.$$

Man erfüllt diese Gleichung, wenn $\Delta\psi$ eine beliebige Function von ψ und

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}=\frac{k^2}{s}\,\Delta\Delta\psi \text{ ist.}$$

Wir erfüllen diese beiden Bedingungen durch die Annahme

$$\psi=e^{i\alpha x+nt}\,(Ae^{-\alpha y}+Be^{-\beta y}) \tag{65}$$

$$n=\frac{k^2}{s}\,(\beta^2-\alpha^2).$$

Dann ist die Wellenlänge $\lambda=\frac{2\pi}{\alpha}$ und

$$\frac{p}{s}=+\,gy-ni\,Ae^{i\alpha x-\alpha y+nt}+\text{const.}$$

Hierdurch ist eine Wellenbewegung für unendliche Wassertiefe dargestellt, die der oben ohne Reibung behandelten gleich wird, wenn k verschwindet. Ohne Reibung muss $B=0$ sein und die Gleichung $n=\frac{k^2}{s}\,(\beta^2-\alpha^2)$ fällt fort.

Um die Bedingungen an der Oberfläche zu erfüllen, legen wir die Axe in die horizontale Oberfläche ohne Wellen und setzen die Wellenlinie an der Oberfläche

$$y=Ce^{i\alpha x+nt}. \tag{66}$$

Hieraus folgt in der Oberfläche, wenn die Abweichungen von der horizontalen sehr klein sind,

$$-\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{dy}{dt}=n\,Ce^{i\alpha x+nt}=-i\alpha e^{i\alpha x+nt}\,(A+B) \tag{67}$$

$$C=-(A+B)\,\frac{i\alpha}{n}$$

$$\frac{p}{s}=\left[-(A+B)\,\frac{i\alpha g}{n}-Ani\right]e^{i\alpha x+nt}.$$

Ist die Wellenhöhe, wie wir schon angenommen haben, sehr niedrig, so ist der Cosinus des Winkels, den die Wellennormale mit der y-Axe bildet, $\cos ny$ nahe gleich Eins, $\cos nx=\varepsilon$ ist eine sehr kleine Grösse.

Also ist

$$X_n=\varepsilon X_x+X_y$$

$$Y_n=\varepsilon Y_x+Y_y.$$

Die Bedingung an der Oberfläche ist, da hier vollständige Gleitung angenommen werden muss, nach § 3, Abschnitt I

$$\frac{X_n}{Y_n} = \frac{\cos nx}{\cos ny} = \varepsilon\,, \quad \text{also } \varepsilon X + X_y = \varepsilon^2 Y_x + \varepsilon Y_y.$$

Hieraus folgt zunächst, dass $Y_x = X_y$ von der Ordnung ε sein muss, also annähernd Null. Dann muss der Druck constant längs der ganzen Wellenlinie sein.

Daraus folgt

$$Y_y = \text{const.}$$

Es ist also

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\,, \\ p &= -2k^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \text{const}\,, \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

daher

$$2A\alpha^2 + (\alpha^2 + \beta^2) B = 0\,,$$

$$\frac{g\alpha}{n}(A + B) + nA = -\frac{2k^2}{s}\alpha(A\alpha + B\beta)$$

und hieraus

$$\frac{4k^4}{s^2}\alpha^3\beta = \left(n + \frac{2k^2}{s}\alpha^2\right)^2 + g\alpha, \tag{69}$$

eine bereits von Lamb abgeleitete Gleichung.

Nun ist

$$\beta^2 = \frac{ns}{k^2} + \alpha^2.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ist der Werth von n zu eliminiren. Dann kann man β durch die übrigen Grössen ausdrücken.

Der Werth von β ist im Allgemeinen complex.

Es ist für kleine Reibung

$$\beta = \sqrt{\frac{-\alpha^2 + \sqrt{\frac{g\alpha s^2}{k^4} + \alpha^4}}{2}} + i\sqrt{\frac{\alpha^2 + \sqrt{\frac{g\alpha s^2}{k^4} + \alpha^4}}{2}}$$

und annähernd

$$\beta = \sqrt{\frac{\sqrt{g\alpha s}}{2k^2}}(1 + i), \quad \frac{sn}{k^2} = \frac{is\sqrt{g\alpha}}{k^2} - 2\alpha^2.$$

Es ist also

$$\psi = e^{iax + \left(i\sqrt{g\alpha} - 2\frac{\alpha^2 k^2}{s}\right)t}\left(Ae^{-\alpha y} + Be^{-(1+i)\sqrt{\frac{s\sqrt{g\alpha}}{2k^2}}\,y}\right). \quad 70)$$

Der reelle Theil von ψ hat also die Form

$$\psi = A_1 e^{-\alpha y - 2\alpha^2\frac{k^2 t}{s}}\cos\left(\alpha x + \sqrt{g\alpha}\,t\right) -$$

$$+ B_1 e^{-\sqrt{\frac{s\sqrt{g\alpha}}{2k^2}}\,y - 2\alpha^2\frac{k^2}{s}t}\cos\left(\alpha x + \sqrt{g\alpha}\;t + \sqrt{\frac{s\sqrt{g\alpha}}{2k^2}}\;y\right). \quad 71)$$

Da $\frac{A}{B}$ im Allgemeinen complex ist, so sind A_1 und B_1 Constanten, die von A, B, α, β, g, k^2 abhängen. Die Bewegung besteht also aus zwei Theilen, von denen jeder mit zunehmender Zeit und Zunehmen der Tiefe stark abnimmt. Der zweite ist aber noch periodisch in Bezug auf die Verticalrichtung und zwar ist die Länge der Periode $2\pi\sqrt{\frac{2k^2}{s\sqrt{g\alpha}}}$.

Bei sehr grosser Reibung ist n reell und annähernd

$$n = -\frac{g\alpha s}{2k^2\alpha} \text{ und } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \frac{gs^2}{2k^4\alpha}}.$$

Bei grossem k wird die Bewegung sehr langsam sein und nach der Tiefe in demselben Verhältniss abnehmen wie bei kleiner Reibung.

Zur genaueren Bestimmung von n setzen wir

$$\frac{sn + 2k^2\alpha^2}{s\sqrt{g\alpha}} = m, \qquad \frac{k^2\alpha^2}{s\sqrt{g\alpha}} = \sigma$$

in die Gleichung 68), so haben wir die Gleichung

$$(m^2 + 1)^2 = (m - \sigma)\,16\,\sigma^3. \quad 72)$$

Ist die Reibung klein, so ist σ eine kleine Grösse und wir haben

$$m = \pm i,$$

$$n = i\sqrt{g\alpha} - \frac{2k^2\alpha^2}{s}.$$

Nun ist $\frac{2\pi}{\alpha}$ die Wellenlänge λ, der Dämpfungsfactor ist also

$$e^{-\frac{2k^2}{s}\frac{4\pi^2}{\lambda^2}t},$$

wie wir schon gefunden haben, die Dämpfung nimmt also mit der Wellenlänge stark ab. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\sqrt{\frac{g}{\alpha}} = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}}$ wird durch die Reibung nicht beeinflusst.

Ist die Reibung sehr gross, so ist m^2 gross gegen Eins, und wir haben nach 72)

$$m^4 - 16\,\sigma^3\, m + 16\,\sigma^4 = 0.$$

Eine Wurzel der Gleichung ist $m = 2\,\sigma$.

In der ursprünglichen Gleichung können wir also den genaueren Werth durch das Newton'sche Verfahren ermitteln. Nennen wir den genauen Werth der Wurzel $m + \varepsilon$, so ist

$$m + \varepsilon = 2\,\sigma - \frac{1}{\sigma}\,\frac{8\,\sigma^2 + 1}{16\,\sigma^2 + 8},$$

$$\frac{n}{\sqrt{g\alpha}} = -\frac{1}{\sigma}\,\frac{8\,\sigma^2 + 1}{16\,\sigma^2 + 8},$$

$$n = -\frac{g\alpha s}{k^2\alpha^2}\,\frac{8\,k^4\alpha^4 + g\alpha s^2}{16 k^4\alpha^4 + 8 g\alpha s^2}$$

als genauerer Werth für sehr starke Reibung.

Wir haben dann keine periodische Bewegung mehr, die Wellenform geht allmählig in die horizontale Gleichgewichtslage über.

Die Drehungsgeschwindigkeit ist

$$\Delta\psi = (\beta^2 - \alpha^2)\,\psi_1 = \frac{ns}{k^2}\,\psi_1,$$

wenn

$$\psi_1 = Be^{-\beta y}\, e^{i\alpha x + nt} \quad \text{ist.}$$

Wenn also α nahe gleich β ist, so wird die Drehungsgeschwindigkeit verschwindend klein.

Von Interesse ist es noch für die Theorie der Wasserwellen, die Zeit zu berechnen, die bei bestimmter Wellenlänge erforderlich ist, um die Amplitude bis auf den zehnten Theil zu verkleinern. Aus dem Dämpfungsfactor $e^{-2k^2\frac{4\pi^2 t}{s\lambda^2}}$ ergiebt sich, wenn $\frac{k^2}{s} = 0{,}018\ \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}$ angenommen wird,

t in Stunden	λ in Metern
0,045	0,1
1,125	0,5
4,505	1
112,51	5
450,5	10.

Bei den sehr langen Wellen der freien Meere wird es demnach Tage lang dauern können, bis die vom Sturm erregten Wellen sich beruhigen. Doch wird bei hohen Wellen die dann auftretende Brandung eine stärkere Schwächung des Wellenschlags bedingen.

Um den Einfluss der Reibung bei sehr flachem Wasser zu erhalten, setzen wir

$$\psi = e^{i\alpha x + nt} \left\{ A \left(e^{\alpha(y-h)} - e^{-\alpha(y-h)}\right) + B \left(e^{\beta(y-h)} - e^{-\beta(y-h)}\right) \right\}, \quad 73)$$

so dass $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ für $y = h$ ist. h ist also die Wassertiefe.

Dann ist die Wellenlinie

$$y = Ce^{i\alpha x + nt} \left\{ A \left(e^{-\alpha h} - e^{\alpha h}\right) + B \left(e^{-\beta h} - e^{\beta h}\right) \right\},$$

daher

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{dy}{dt}, \qquad nC = -i\alpha,$$

$$y = -\frac{i\alpha}{n} e^{i\alpha x + nt} \left\{ A \left(e^{-\alpha h} - e^{\alpha h}\right) + B \left(e^{-\beta h} - e^{\beta h}\right) \right\}.$$

Ferner ergiebt sich

$$e^{-i\alpha x - nt} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = -2\alpha^2 A \left(e^{\alpha(y-h)} - e^{-\alpha(y-h)}\right)$$
$$- B(\alpha^2 + \beta^2) \left(e^{\beta(y-h)} - e^{-\beta(y-h)}\right).$$

Ist h sehr klein, so können wir $e^{\alpha(y-h)} = 1 + \alpha(y - h)$ setzen und erhalten in der Oberfläche für $y = 0$ entsprechend Gleichung 68)

$$0 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\left[2A\alpha^3 + B\beta(\alpha^2 + \beta^2)\right] 2h. \qquad 74)$$

Für den Druck ergiebt sich

$$\frac{p}{s} = gy + niAe^{i\alpha x + nt} \left(e^{\alpha(y-h)} + e^{-\alpha(y-h)}\right)$$

und aus der Gleichung

$$p = -2k^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

folgt in der Oberfläche

$$\frac{g\alpha}{n}(A\alpha + B\beta) + \frac{nA}{h} = -\frac{2k^2\alpha}{hs}\{A\alpha + B\beta\}. \tag{75}$$

Nimmt man als Grenzbedingung ein festes Haften der Flüssigkeit am Boden an, so ist $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$ für $y = h$, also $A\alpha + B\beta = 0$, woraus $A = B = 0$ folgt, sodass dann eine derartige Wellenbewegung überhaupt unmöglich ist. Lässt man die Möglichkeit des Gleitens offen, so ergiebt sich aus den beiden Gleichungen 75) durch Elimination von $\frac{A}{B\beta}$ mit Berücksichtigung der Gleichung

$$\beta^2 = \frac{ns}{k^2} + \alpha^2,$$

$$n = -\frac{2\alpha^2 k^2}{s} \pm i\alpha\sqrt{gh - \frac{4\alpha^2 k^4}{s^2}}, \qquad \alpha = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{76}$$

Der Dämpfungsfactor ist auch hier

$$e^{-\frac{2k^2}{s}\frac{4\pi^2}{\lambda^2}t}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist

$$= \sqrt{gh - \frac{16\pi^2 k^4}{s^2\lambda^2}}. \tag{77}$$

Bei flachem Wasser wird die Geschwindigkeit der Wellen durch die Reibung verkleinert.

Ist $\frac{16\pi^2 k^4}{s^2\lambda^2} > gh$, so sind keine Schwingungen mehr vorhanden.

Ferner ist

$$\beta^2 = -\alpha^2 \pm \frac{s}{k^2}\alpha i\sqrt{gh - \frac{4\alpha^2 k^4}{s^2}},$$

$$\beta = \sqrt{\frac{-\alpha^2 + \sqrt{-3\alpha^4 + \frac{s^2\alpha^2}{k^4}gh}}{2}} + i\sqrt{\frac{\alpha^2 + \sqrt{-3\alpha^4 + \frac{s^2\alpha^2}{k^4}gh}}{2}}. \tag{78}$$

So lange Schwingungen vorhanden sind, ist die Bewegung auch nach y periodisch und zwar bei kleiner Reibung auf die Länge

$$\frac{2\pi k \sqrt{2}}{\sqrt{s\alpha}\,\sqrt[4]{gh}}.$$

Wir nehmen nun unendlich kleine ebene Schallwellen parallel der x-Axe an. Die Differentialgleichungen 1) und 1a) geben dann, wenn wir die quadratischen Glieder der Geschwindigkeiten vernachlässigen

$$\begin{gathered}\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial (su)}{\partial x} = 0 \\ -\frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} - \tfrac{4}{3}\frac{k^2}{s}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.\end{gathered} \tag{79}$$

Wir setzen nun $p = a^2 s$, wo a^2 eine Constante bezeichnet und

$$s = s_0 (1 + \sigma);$$

σ wird ebenso wie u als sehr klein angenommen. Berücksichtigen wir nur Glieder erster Ordnung, so ist

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$-\frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma}{\partial x} a^2 = \frac{\partial u}{\partial t} - \tfrac{4}{3}\frac{k^2}{s_0}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Durch Elimination von σ ergiebt sich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \tfrac{4}{3}\frac{k^2}{s_0}\frac{\partial^3 u}{\partial t\,\partial x^2} = 0. \tag{80}$$

Setzen wir

$$u = A e^{int + \alpha x},$$

so nehmen wir damit an, dass die Bewegung durch äussere Kräfte der Zeit nach constant gehalten wird. Wir finden dann

$$n^2 + a^2\alpha^2 + i\,\tfrac{4}{3}\frac{k^2}{s_0} n \alpha^2 = 0,$$

$$\alpha^2 = -\frac{n^2}{a^2 + i\,\tfrac{4}{3}\frac{k^2}{s_0} n} = -\frac{n^2 \left(a^2 - i\,\tfrac{4}{3}\frac{k^2}{s_0} n\right)}{a^4 + \tfrac{16}{9}\frac{k^4 n^2}{s_0^2}},$$

$$\alpha = \frac{n}{a}\left[\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+\frac{16}{9}\frac{k^4n^2}{s_0^2a^4}}}{2\left(1+\frac{16}{9}\frac{k^4n^2}{s_0^2a^4}\right)}} + i\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+\frac{16}{9}\frac{k^4n^2}{s_0^2a^4}}}{2\left(1+\frac{16}{9}\frac{k^4n^2}{s_0^2a^4}\right)}}\right] \qquad 81)$$

$$= \frac{n}{a}(a_1 + b_1 i).$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen ist $\frac{an}{nb_1} = \frac{a}{b_1}$. Wenn keine Reibung vorhanden ist, so ist sie gleich a. Durch die Reibung wird also die Geschwindigkeit etwas verkleinert. Der Dämpfungsfactor wird in erster Näherung

$$e^{-\frac{2}{3}\frac{n^2k^2}{a^3s_0}x} = e^{-\frac{8}{3}\frac{\pi^2k^2}{a^3s_0T^2}x},$$

wenn T die Schwingungsdauer bedeutet.

Man sieht also, dass die Wellen mit geringer Schwingungsdauer schnell an Stärke abnehmen.

In einer cylindrischen Röhre ist der Einfluss der Reibung weit stärker. Es sind hier unter der Voraussetzung, dass die Luft an den Wänden fest haftet, die Grenzbedingungen nur zu erfüllen, wenn auch noch radiale Bewegungen angenommen werden.

Wir haben dann die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0\\
&-\frac{\partial\sigma}{\partial x}a^2 = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{4}{3}\frac{k^2}{s_0}\Delta u\\
&-\frac{\partial\sigma}{\partial y}a^2 = \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{4}{3}\frac{k^2}{s_0}\Delta v\\
&-\frac{\partial\sigma}{\partial z}a^2 = \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{4}{3}\frac{k^2}{s_0}\Delta w.
\end{aligned} \qquad 82)$$

Aus den drei letzten Gleichungen ergiebt sich durch Differentiation und Berücksichtigung der ersten

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} = a^2\Delta\sigma + \frac{4}{3}\frac{k^2}{s_0}\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial t}. \qquad 83)$$

Setzen wir

$$\Delta\sigma = \gamma\sigma, \qquad 83\,a)$$

so ist, wenn σ den Factor e^{int} enthält,

$$n^2 + a^2\gamma + \tfrac{4}{3}\frac{k^2}{s_0} in\gamma = 0 .$$

γ ist eine Constante.

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} u &= \mathfrak{A}\frac{\partial\sigma}{\partial x} + Bu_1 , \\ v &= \mathfrak{A}\frac{\partial\sigma}{\partial y} + Bv_1 , \\ w &= \mathfrak{A}\frac{\partial\sigma}{\partial z} + Bw_1 , \end{aligned} \tag{84}$$

und erhalten, da auch u, v, w den Factor e^{int} enthalten,

$$-a^2 = in\,\mathfrak{A} - \tfrac{4}{3}\frac{k^2}{s_0}\mathfrak{A}\gamma , \qquad \begin{aligned} \Delta u_1 &= \tfrac{3}{4}\frac{ins_0}{k^2} u_1 , \\ \Delta v_1 &= \tfrac{3}{4}\frac{ins_0}{k^2} v_1 , \\ \Delta w_1 &= \tfrac{3}{4}\frac{ins_0}{k^2} w_1 . \end{aligned} \tag{85}$$

Nun ist

$$\tfrac{4}{3}\frac{k^2}{s_0}\gamma - in = \frac{ia^2\gamma}{n} , \tag{86}$$

also

$$\mathfrak{A} = -\frac{in}{\gamma} , \quad \gamma = -\frac{n^2}{a^2 + \tfrac{4}{3}\frac{k^2}{s_0} in} .$$

Alle Grössen sollen nur von x und $\varrho = \sqrt{y^2 + z^2}$ abhängen und die Abhängigkeit von x soll sich auf den Factor $e^{\alpha x}$ beschränken. Dann ist

$$\begin{aligned} (a^2 - \gamma)\,\sigma + \frac{\partial^2\sigma}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\sigma}{\partial\varrho} &= 0 , \\ \left(a^2 - \tfrac{3}{4}\frac{ins_0}{k^2}\right) u_1 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u_1}{\partial\varrho} &= 0 . \end{aligned} \tag{87}$$

Wir setzen $v = \mathfrak{r}\frac{y}{\varrho}$, $w = \mathfrak{r}\frac{z}{\varrho}$, $\mathfrak{r} = \mathfrak{A}\frac{\partial\sigma}{\partial\varrho} + B\mathfrak{r}_1$, dann ziehen sich die Gleichungen für v_1 und w_1 in eine zusammen

$$\left(a^2 - \tfrac{3}{4}\frac{ins_0}{k^2}\right)\mathfrak{r}_1 + \frac{\partial^2\mathfrak{r}_1}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\mathfrak{r}_1}{\partial\varrho} - \frac{\mathfrak{r}_1}{\varrho^2} = 0 . \tag{88}$$

Die erste Gleichung 82) giebt mit Berücksichtigung von 83a), 84) und 86)

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{r}_1}{\partial \varrho} + \frac{\mathfrak{r}_1}{\varrho} = 0$$

oder

$$\alpha u_1 + \frac{\partial \mathfrak{r}_1}{\partial \varrho} + \frac{\mathfrak{r}_1}{\varrho} = 0.$$

Differenziren wir diese Gleichung nach ϱ, so ergiebt sich mit Berücksichtigung von 88)

$$\left(\alpha^2 - \tfrac{3}{4}\frac{ins_0}{k^2}\right)\mathfrak{r}_1 = \alpha\frac{\partial u_1}{\partial \varrho}, \qquad \mathfrak{r}_1 = \frac{\alpha}{\alpha^2 - \tfrac{3}{4}\frac{ins_0}{k^2}}\frac{\partial u_1}{\partial \varrho}. \tag{89}$$

Es ist also

$$\begin{aligned} u &= -\frac{in}{\gamma}\alpha\sigma + Bu_1, \\ \mathfrak{r} &= -\frac{in}{\gamma}\frac{\partial \sigma}{\partial \varrho} + \frac{\alpha B}{\alpha^2 - \tfrac{3}{4}\frac{ins_0}{k^2}}\frac{\partial u_1}{\partial \varrho} \end{aligned} \tag{90}$$

oder

$$\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial \varrho} = \frac{\alpha}{\alpha^2 - \tfrac{3}{4}\frac{ins_0}{k^2}}\frac{1}{u_1}\frac{\partial u_1}{\partial \varrho},$$

wenn $\mathfrak{r} = u = 0$ sind.

Für $\varrho = R$ müssen u, $\mathfrak{r}$ verschwinden.

Sowohl σ als u_1 genügen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 J_0}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dJ_0}{d\varrho} + q^2 J_0 = 0,$$

sind also Bessel'sche Functionen. Wir haben zu setzen

$$\text{für } \sigma \qquad q_1^2 = \alpha^2 + \frac{n^2}{\alpha^2 + \tfrac{4}{3}\frac{k^2}{s_0}in},$$

$$\text{für } u_1 \qquad q_2^2 = \alpha^2 - \tfrac{3}{4}\frac{ins_0}{k^2}.$$

α ist für lange Wellen und kleine Reibung eine kleine Grösse; $\frac{\alpha}{n}$ ist die Wellenlänge ohne Reibung. Im ersteren Falle ist also q eine kleine Zahl. Die Reihe für J_0 ergiebt bei Berücksichtigung nur des ersten Gliedes

$$J_0 = 1 - \frac{q^2\varrho^2}{4}. \tag{91}$$

Im zweiten Falle ist α^2 klein, das imaginäre Glied bei kleiner Reibung gross, wenn die Schwingungszahl n nicht zu klein ist.

Wir haben also

$$q_2 = + \sqrt{\frac{\alpha^2 + \sqrt{\frac{q}{16}\frac{n^2 s_0^2}{k^4} + \alpha^4}}{2}} + i \sqrt{\frac{-\alpha^2 + \sqrt{\frac{q}{16}\frac{n^2 s_0^2}{k^4} + \alpha^4}}{2}}\,.$$

Der reelle und imaginäre Theil von q_2 sind sehr gross bei kleiner Reibung.

Nun ist allgemein

$$J_0(iq_2\varrho) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{-q_2\varrho\cos\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{-q_2\varrho\left(2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1\right)}\,d\varphi\,.$$

Setzen wir $2q_2\varrho\cos^2\frac{1}{2}\varphi = u$, so haben wir für grosse Werthe von $q_2\varrho$

$$J_0(iq_2\varrho) = \frac{e^{q_2\varrho}}{\pi\sqrt{2\varrho q_2}}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du = \frac{e^{q_2\varrho}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2q_2\varrho}} = \frac{e^{q_2\varrho}}{\sqrt{2q_2\varrho}}\,\Gamma(\tfrac{1}{2})\,. \tag{92}$$

Nach der Theorie der Gammafunction gilt diese Beziehung, wenn der reelle Theil von $iq_2\varrho$ positiv und unendlich ist.

Die Gleichung, die an der Grenze zu erfüllen ist, nämlich Gleichung 90) lässt sich schreiben

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\log\sigma}{\partial\varrho} = \frac{\alpha}{\alpha^2 - \frac{3}{4}\frac{i\,n s_0}{k^2}}\,\frac{l\log u_1}{\partial\varrho} = \frac{\alpha}{q_2^2}\,\frac{\partial\log u_1}{\partial\varrho}\,.$$

Es wird dann, wenn wir die Näherungswerthe aus 91) und 92) einsetzen

$$\left(\alpha^2 + \frac{n^2}{a^2}\right)\frac{R}{2\alpha} + \frac{\alpha}{q_2} = 0\,. \tag{93}$$

Wenn keine Reibung vorhanden ist, so ist

$$\alpha = i\,\frac{n}{a}\,.$$

Dies ist die erste Näherung. Setzen wir nun als nächste Näherung

$$\alpha + \varepsilon$$

fest, so ist nach dem Newtonschen Näherungsverfahren

$$\varepsilon = -\frac{f\left(i\frac{n}{a}\right)}{f'\left(i\frac{n}{a}\right)},$$

wenn wir die Gleichung 93) mit $f(\alpha)$ und $\frac{df}{d\alpha}$ mit $f'(\alpha)$ bezeichnen.

Berücksichtigen wir nur Glieder erster Ordnung, so ergiebt sich

$$\alpha = \frac{in}{a} + \frac{i\sqrt{n}\,k}{Ra\sqrt{s_0}}\sqrt{\tfrac{2}{3}} - \frac{\sqrt{n}\,k}{Ra\sqrt{s_0}}\sqrt{\tfrac{2}{3}} = a_1 + b_1 i.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen ist demnach

$$\frac{n}{b_1} = a\left(1 - \frac{k}{R\sqrt{n}\sqrt{s_0}}\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) \tag{94}$$

und der Dämpfungsfactor

$$e^{a_1 x} = e^{-\frac{\sqrt{n}kx}{Ra\sqrt{s_0}}\sqrt{\tfrac{2}{3}}}. \tag{95}$$

Durch die Reibung an den Wänden ist also die Dämpfung in Röhren weit stärker als in freier Luft.

§ 4.

Fluthreibung.

Zur Bestimmung der Fluthreibung kann man mit den gewöhnlichen Differentialgleichungen nicht auskommen, weil die innere Reibung der Flüssigkeiten bei ausgedehnten Gewässern eine geringe Rolle spielt für Wellen von grosser Länge. Es kommt dort noch die Reibung zwischen dem festen Erdkörper und der Flüssigkeit in Betracht, deren Grösse allerdings unbekannt ist. Wenn wir den durch die innere Reibung bedingten Dämpfungsfactor $e^{-\frac{8\pi^2k^2t}{\lambda^2 s}}$ annehmen, so würde bei einer Wellenlänge von zwei Erdquadranten die Amplitude in $2 \cdot 10^{11}$ Jahren auf den zehnten Theil, also die lebendige Kraft auf den hundertsten Theil gesunken sein.

Für die Berücksichtigung der Reibung zwischen Erde und Meer gehen wir nach Lamb von der Gleichung 5) Abschnitt V

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -k'\frac{d\eta}{dt} + a^2\frac{d^2\eta}{dx^2} \tag{96}$$

aus, der das Glied $-k'\frac{d\eta}{dt}$ zugefügt ist. Hier bedeutet das k' die Reibungsconstante, welche ausdrückt, dass die gedachte Reibung der Geschwindigkeit proportional ist.

Setzen wir

$$\eta = Ae^{nt+imx},$$

so wird

$$n^2 + k'n + m^2a^2 = 0,$$

$$n = -\tfrac{1}{2}k' \pm i\sqrt{(m^2a^2 - \tfrac{1}{4}k'^2)},$$

so dass wir haben

$$\eta = Ae^{-\frac{1}{2}k't}\cos\left\{\left(\sqrt{m^2a^2 - \tfrac{1}{4}k'^2}\right)t - mx\right\}.$$

Nehmen wir eine äussere Kraft hinzu, wie sie vom Monde ausgeht,

$$X = -B\sin 2\left(\omega t + \frac{x}{r}\right),$$

wo ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde und r ihren Halbmesser bezeichnen.

Dann ergiebt sich für die Erhebung über die Horizontale

$$\eta = \frac{Bra^2}{2g\left[\sqrt{(a^2-\omega^2r^2)^2 + \frac{1}{4}k'^2\omega^2r^4}\right]}\cos 2\left(\omega t + \frac{x}{r} - \varepsilon\right), \tag{97}$$

$$= \frac{Ba^2}{gk'\omega r}\sin 2\varepsilon\cos 2\left(\omega t + \frac{x}{r} - \varepsilon\right),$$

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{k'\omega r^2}{a^2 - \omega^2r^2}, \qquad a^2 = gh.$$

Durch diese Reibung erfährt also die Fluthwelle eine Phasenverzögerung um den Winkel 2ε. Wenn $gh = a^2 < \omega^2r^2$, so ist ohne Reibung die Axe des Fluthellipsoids senkrecht zur Verbindungslinie mit dem flutherregenden Körper. Dann ist $\frac{\pi}{4} < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ und $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ für $k' = 0$. Die Axe des Fluthellipsoids wird also der Drehungsrichtung der Erde entgegengesetzt um den Winkel ε verschoben und der Eintritt der Fluth durch die Reibung beschleunigt. Wenn $a^2 > \omega^2r^2$, so ist $\varepsilon = 0$ für $k' = 0$ und der Eintritt der Fluth wird verzögert.

Bei dieser Theorie ist die tangentiale Druckcomponente in der horizontalen Oberfläche Null gesetzt. Thatsächlich bedingt die Erhebung und Senkung eine Druckkraft X_y, welche aus der Gleichung

$$\frac{dX_y}{dy} = X$$

sich ergiebt. Ist der Niveauunterschied sehr klein, so ist $dX_y = Xdy = X\eta$ die resultirende Druckkraft.

Bilden wir den Mittelwerth über die ganze Periode $T = \frac{\pi}{\omega}$, so ergiebt sich

$$\frac{1}{T}\int_0^T dt\,(X\eta) = \frac{B^2 a^2 \sin^2 2\varepsilon}{2 g k' \omega r}. \tag{98}$$

Durch den Einfluss der Reibung hebt sich diese tangentiale Kraft in der Periode der Welle nicht auf, sondern giebt Veranlassung zu Strömungen zweiter Ordnung, welche mit der Fluth fortschreiten.

§ 5.

Einfluss der Reibung auf flache Cyklonen.

Bei ausgedehnten sehr flachen Cyklonen spielt der Reibungswiderstand an der Erdoberfläche und die Erdrotation eine erhebliche Rolle.

Das Problem muss dann durch die Annahme vereinfacht werden, dass die Geschwindigkeiten nur von der Entfernung vom Centrum, nicht von der vertikalen Coordinate abhängen.

Vertikale Geschwindigkeit soll nur innerhalb eines Kreises vom Radius R vorhanden sein und ihr Werth nur in der Continuitätsgleichung berücksichtigt werden. Die innere Reibung wird vernachlässigt und die Reibung an der Erdoberfläche proportional der Geschwindigkeit angenommen.

Die Gleichungen 40) nehmen dann folgende Gestalt an

$$-\frac{1}{s}\frac{\partial p}{\partial \varrho} = \mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{r}}{d\varrho} - \mathfrak{y}^2\varrho - 2\gamma\mathfrak{y}\varrho + k'\mathfrak{r},$$

$$0 = \mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{y}}{d\varrho} + \frac{2\mathfrak{y}\mathfrak{r}}{\varrho} + \frac{2\gamma\mathfrak{r}}{\varrho} + k'\mathfrak{y}, \tag{99}$$

$$\frac{d}{d\varrho}(\mathfrak{r}\varrho) = -\varrho\frac{\partial w}{\partial x};$$

hier bedeuten k' die Reibungsconstante an der Erde, γ das Produkt aus der Winkelgeschwindigkeit der Erde in den Sinus der geographischen Breite.

Setzen wir nun $w = cz$, sodass die vertikale Geschwindigkeit an der Erdoberfläche für $z = 0$ verschwindet, so haben wir

$$\frac{d}{d\varrho}(\mathfrak{x}\varrho) = -\varrho c \text{ für } \varrho < R, \quad \frac{d(\mathfrak{x}\varrho)}{d\varrho} = 0 \text{ für } \varrho > R.$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{x} = -\frac{\varrho c}{2} + \frac{c'}{\varrho} \text{ für } \varrho < R, \quad \mathfrak{x} = \frac{c''}{\varrho} \text{ für } \varrho > R.$$

Für $\varrho < R$ muss $c' = 0$ sein. Da $\mathfrak{x}$ überall stetig sein muss, ist zu setzen

$$c'' = -\frac{R^2}{2}c; \quad \text{wir erhalten also}$$

$$\mathfrak{x} = -\frac{\varrho c}{2}; \quad \varrho < R, \tag{100}$$

$$\mathfrak{x} = -\frac{R^2 c}{2\varrho}; \quad \varrho > R.$$

Diese Werthe sind in die zweite der Differentialgleichungen 99) einzusetzen. Wir erhalten dann

$$\frac{\varrho c}{2}\left(\frac{d\mathfrak{y}}{d\varrho} + \frac{2\mathfrak{y}}{\varrho} + \frac{2\gamma}{\varrho}\right) - k'\mathfrak{y} = 0, \quad \varrho < R$$

$$\frac{R^2}{2}\frac{c}{\varrho}\left(\frac{d\mathfrak{y}}{d\varrho} + \frac{2\mathfrak{y}}{\varrho} + \frac{2\gamma}{\varrho}\right) - k'\mathfrak{y} = 0, \quad \varrho > R.$$

Die Integrale dieser Differentialgleichung sind

$$\mathfrak{y} = +\frac{c\gamma}{k}\frac{R^2}{\varrho^2} + \frac{C_2}{\varrho^2}e^{\frac{k'}{c}\frac{\varrho^2}{R^2}} \qquad \varrho > R$$

$$\mathfrak{y} = +\frac{c\gamma}{k'-c} + C_1\varrho^{2\left(\frac{k'-c}{c}\right)} \qquad \varrho < R. \tag{101}$$

Da nun $\mathfrak{y}$ nicht unendlich werden darf, so muss

für negatives c die Constante $C_1 = 0$,

für positives c die Constante $C_2 = 0$ sein.

Wenn c positiv ist, so steigt die Flüssigkeit im inneren Raum auf; wir haben es mit einer Cyklone zu thun; ein negatives c entspricht einer Anticyklone.

Der Unterschied zwischen beiden ist in der Reibung begründet; es ist daher die Cyklone nicht einfach eine Umkehrung der Anticyklone.

Die Geschwindigkeit $\mathfrak{y}$ muss ebenfalls für $\varrho = R$ stetig sein. Dies giebt für die Cyklone

$$\frac{c\gamma}{k'} = \frac{c\gamma}{k'-c} + C_1 R^{2\frac{k'-c}{c}}, \tag{102)}$$

für die Anticyklone

$$\frac{c\gamma}{k'} + \frac{C_2}{R^2} e^{\frac{k'}{c}} = \frac{c\gamma}{k'-c}.$$

Die Windgeschwindigkeit ist

$$\begin{aligned} W &= \sqrt{\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{y}^2\varrho^2}, \\ &= \varrho c \sqrt{\tfrac{1}{4} + \left(\frac{\gamma}{k'-c}\right)^2 \left[1 - \frac{c}{k'}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^{2\frac{k'-c}{c}}\right]^2} \quad \varrho < R \\ &= \frac{R^2}{\varrho} c \sqrt{\tfrac{1}{4} + \frac{\gamma^2}{k'^2}} \quad \varrho > R \end{aligned} \Bigg\} \text{ für die Cyklone}$$

$$\begin{aligned} &= \varrho c \sqrt{\tfrac{1}{4} + \frac{\gamma^2}{(k'-c)^2}} \quad \varrho < R \\ &= \frac{R^2}{\varrho} c \sqrt{\tfrac{1}{4} + \frac{\gamma^2}{k'^2}\left(1 + \frac{c}{k'-c} e^{\frac{k'}{c}\left(\frac{\varrho^2}{R^2} - 1\right)}\right)^2} \quad \varrho > R \end{aligned} \Bigg\} \text{ für die Anticyklone.} \tag{103)}$$

Im äusseren Gebiet ($\varrho > R$) ist die Windstärke bei kleinen absoluten Werthen von c, also schwachem Winde, an gleichen Orten bei der Cyklone stärker als bei der Anticyklone.

Der Unterschied ist am grössten für $-\frac{c}{k'-c} e^{\frac{k'}{c}\left(\frac{\varrho^2}{R^2} - 1\right)} = 1$ bei der Anticyklone. Setzt man $k' = 0{,}00008$, $\gamma = 0{,}00006$, so würde sich die Windgeschwindigkeit bei der Cyklone zu der bei der Anticyklone verhalten wie $\sqrt{13} : 2$. Für

$$1 < -\frac{c}{k'-c} e^{\frac{k'}{c}\left(\frac{\varrho^2}{R^2} - 1\right)} < 2$$

würde die Cyklone stärkeren Wind haben als die Anticyklone, dann aber die Anticyklone überwiegen.

Für die Cyklone muss $2k' > c$ sein, weil für grössere Werthe von c die Geschwindigkeit im Centrum unendlich wird. Nimmt man den Reibungscoefficienten $k' = 0{,}00008$, so erhält man den Maximalwerth, den die Geschwindigkeit des aufsteigenden Stromes für die Cyklone erhalten kann, nämlich $c = 0{,}16 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$. Bei der Anticyklone ist die Geschwindigkeit des absteigenden Stromes unbeschränkt, weil dann c negativ ist.

Unter dem Ablenkungswinkel versteht man den Winkel, den die Windrichtung mit dem sogenannten Gradienten (der Richtung grössten Druckgefälles), in diesem Falle also mit $\pm \varrho$, bildet. Bezeichnen wir ihn mit α, so ist

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{2\gamma}{k'-c}\left[1-\frac{c}{k'}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^{2\frac{k'-c}{c}}\right] && \varrho < R \\ &= \frac{2\gamma}{k'} && \varrho > R \end{aligned}\right\}\text{für die Cyklone}$$

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{2\gamma}{k'-c} && \varrho < R \\ &= \frac{2\gamma}{k'}\left[1+\frac{c}{k'-c}\,e^{\frac{k'}{c}\left(\frac{\varrho^2}{R^2}-1\right)}\right] && \varrho > R \end{aligned}\right\}\text{für die Anticyklone.} \qquad 104)$$

Der Druck ergiebt sich aus den Gleichungen 99) durch elementare Rechnung, die aber bei der Cyklone für das innere, bei der Anticyklone für das äussere Gebiet zu ziemlich umständlichen Ausdrücken führt.

§ 6.

Hydraulische Theorie der Strömungen in Canälen.

Die Strömung der Flüssigkeiten durch Röhren und Canäle folgt dem Poiseuille'schen Gesetze [Gleichung 53)] nur so lange, als die Geschwindigkeit nur parallel den Wänden von Null verschieden ist. Dies ist aber nur bei engen und langen Röhren der Fall. Nach den Untersuchungen von Reynold's scheint bei einer gewissen Geschwindigkeit, die um so kleiner ist, je weiter die Röhren im Vergleich zur Länge sind, plötzlich die Bildung von Wirbelbewegungen einzutreten, wodurch Strömungen in der Richtung der Normalen der Wände hinzukommen und dann hört die Uebereinstimmung mit Poiseuille's Gesetz auf. Es ist vorläufig nicht möglich, eine

befriedigende hydrodynamische Theorie der dann eintretenden Strömungen zu geben. Bei der grossen Wichtigkeit der Frage für die Theorie sowohl, wie namentlich für die Anwendung mögen hier einige Betrachtungen Platz finden, die von einigen Forschern unter Heranziehung einer Anzahl hypothetischer Voraussetzungen angestellt sind, die allerdings den Nachtheil haben, einer exakten Behandlung nicht zugänglich zu sein.

Die Strömung soll stationär sein und der Querschnitt der Flüssigkeit rechteckig oder cylindrisch.

Die x-Axe soll in der Richtung der Bewegung und in der Mittellinie der Röhre liegen. Die z-Axe sei nach unten gerichtet und bilde mit der Vertikalen den Winkel α. Die Flüssigkeit strömt dann unter dem Einfluss der Schwere. Damit die Strömung stationär sei, muss die Verzögerung durch die Reibung und Wirbelbildung der Beschleunigung durch die Schwere gleich sein. Bezeichnen wir den Coefficienten dieser Reibung mit F, so erhalten wir

für den rechteckigen Querschnitt $F + sgz \sin \alpha = 0$,

„ „ cylindrischen „ $2F + sg\varrho \sin \alpha = 0$. 105)

Nun hängt F ab

1) von der Geschwindigkeit längs der Wand u_0 und wird F in erster Näherung u_0 proportional sein.
2) Von der Bildung der Wirbel in der Nähe der Wand, wodurch Energie verzehrt wird, diese wird proportional dem Radius R angenommen.
3) Von der Veränderung der Wirbelbildung nach dem Innern der Flüssigkeit zu. Diese Bildung wird constant sein, wenn die Flächen, durch die hindurch sie sich ausbreitet, dieselbe Grösse haben wie dies bei dem rechteckigen Querschnitt der Fall ist und umgekehrt proportional dem Radius bei kreisförmigem Querschnitt.
4) Von der Veränderung der Geschwindigkeiten beim Fortschreiten zu benachbarten Punkten; die einfachste Annahme ist F proportional dem Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial z}$ oder $\frac{\partial u}{\partial \varrho}$ zu setzen.

Bezeichnet h die halbe Höhe des rechteckigen Querschnitts, so ist also zu setzen

$$F = sgAu_0 h \frac{\partial u}{\partial x} \text{ oder } F = sgAu_0 \frac{R}{2} \frac{R}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho}. \qquad 106)$$

An der Grenze der festen Wand und der Flüssigkeit ist F gleich der Reibung zwischen den beiden Substanzen. Diese Reibung sei proportional

1) der Geschwindigkeit,
2) der vorbeiströmenden Flüssigkeitsmenge.

Hiernach ist zu setzen

$$-F = sgBu_0^2. \qquad 107)$$

A und B sind Constanten, die von der Beschaffenheit der Flüssigkeit und der Wand abhängen.

Mit Hülfe der Gleichungen 105) und 106) und der Grenzbedingung 107) ergiebt sich, wenn U die mittlere Geschwindigkeit bezeichnet, u_1 diejenige in der Mittellinie ist: einmal

$$\frac{u}{\sqrt{h \sin \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{B}} + \frac{\sqrt{B}}{2A}\left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right),$$

$$U = \left(\frac{1}{\sqrt{B}} + \frac{\sqrt{B}}{3A}\right)\sqrt{h \sin \alpha},$$

dann für kreisförmigen Querschnitt $\qquad$ 108)

$$\frac{u}{\sqrt{R \sin \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2B}} + \frac{\sqrt{2B}}{3A}\left(1 - \frac{\varrho^3}{R^3}\right),$$

$$U = \left(\frac{1}{\sqrt{B}} + \frac{6\sqrt{B}}{5 \,.\, 3A}\right)\sqrt{\frac{R}{2}} \sin \alpha,$$

$$u_1 - U = \frac{\sqrt{B}}{6A}\sqrt{h \sin \alpha}, \qquad A = 0{,}00064, \quad B = 0{,}00081,$$

oder $\qquad$ für $x = h$ ist $\qquad$ 108 a)

$$u_1 - U = \frac{8}{5}\frac{\sqrt{B}}{6A}\sqrt{\frac{R}{2}} \sin \alpha, \qquad u_0 = \sqrt{h \sin \alpha}\,\frac{1}{\sqrt{B}}.$$

Diese Formeln sind in Uebereinstimmung mit empirischen Formeln von Darcy (Darcy, Les fontaines publiques de la ville de Dijon).

Bei dem Canal mit rechteckigem Querschnitt verlegen wir die x-Axe in die freie Oberfläche, die sich herstellt, wenn das Gefälle constant ist, also h unabhängig von x ist. Ist h mit x variabel, so wird das Gefälle ebenfalls veränderlich. Ist die Bewegung nicht stationär, und bezeichnen wir mit $\frac{\partial u}{\partial t}$ die Beschleu-

nigung, so tritt an Stelle der Gleichungen 105) und 106) die Gleichung

$$Ahu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \sin\alpha - \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{1}{g}, \qquad 109)$$

wie man leicht sieht, wenn man beide Gleichungen nach z differenzirt und beachtet, dass jetzt die Beschleunigung von Null verschieden ist.

Wenn ausser den Strömungen u noch vertikale Strömungen mit der Geschwindigkeit w vorhanden sind, so ergiebt die Gleichung der Continuität

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$w = -\int \frac{\partial u}{\partial x}\, dz.$$

Für die cylindrische Röhre ergiebt sich, wenn man $\frac{\partial}{\partial \varrho}(F\varrho)$ bildet und mit p' den Druck in der Axe bezeichnet, sodass $p = p' + sgz \cos\alpha$ ist,

$$\frac{A}{2} R^2 u_0 \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \left(\sin\alpha - \frac{1}{sg}\frac{\partial p'}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{1}{g}. \qquad 110)$$

Wir bezeichnen mit H den Werth, den h überall annehmen würde, wenn kein veränderliches Gefälle vorhanden wäre.

Multipliciren wir die Gleichung 109) mit dz oder die Gleichung 110) mit $d\varrho$ und integriren von $H-h$ bis z oder von 0 bis R, berücksichtigen die Bedingung an der Grenze $z = H$ und setzen

$$U' = \frac{1}{h}\int_{H-h}^{H} \frac{\partial u}{\partial t}\, dz \quad \text{oder} \quad U' = \frac{1}{R}\int_0^R \frac{\partial u}{\partial t}\, d\varrho,$$

so erhalten wir, wenn wir $z = H$ setzen

$$Bu_0^2 = \left(\sin\alpha - \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{U'}{g}\right) h$$

oder

$$Bu_0^2 = \left(\sin\alpha - \frac{1}{sg}\frac{\partial p'}{\partial \varrho} - \frac{U'}{g}\right)\frac{R}{2}. \qquad 111)$$

Die Formeln 108) können wir mit Berücksichtigung des Umstandes, dass $u = u_0$, $\sqrt{h \sin\alpha} = \sqrt{Bu_0}$ für $z = h$ wird, schreiben

$$\frac{u}{u_0} = 1 + \frac{B}{2A}\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right), \qquad \frac{u}{u_0} = 1 + \frac{2B}{3A}\left(1 - \frac{\varrho^2}{h^2}\right). \qquad 111\,a)$$

Nehmen wir an, dass für die Beschleunigungen weder die Reibung noch die Druckunterschiede in Betracht kommen, sondern im Wesentlichen die Wirbelbildung maassgebend ist, so haben wir

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Hier vernachlässigen wir das zweite Glied gegen das erste und setzen die Geschwindigkeit $u = \text{const}\, h$, dann ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{u}{h} \frac{dh}{dx},$$

sodass wir haben

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u^2 \frac{1}{h} \frac{dh}{dx}. \tag{111 b}$$

Setzen wir andererseits $u = \text{const}\, R^2$, so ist

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u^2 \frac{2}{R} \frac{dR}{dx}.$$

Wir berücksichtigen diese Gleichungen, indem wir den erhaltenen Werth von $\frac{\partial u}{\partial t}$ in die Gleichungen 109) beziehentlich 110) einsetzen. Den Werth von $\sin\alpha - \frac{\partial h}{\partial x}$ oder den von $\sin\alpha - \frac{1}{sg}\frac{\partial p'}{\partial x}$ entnehmen wir aus 111). Dann integriren wir die Gleichungen 109) und 110) von $H-h$ bis z und von 0 bis ϱ, dann zum zweiten Mal von H bis z und von ϱ bis R, beachten, dass für $z = H-h$ der Werth von $\frac{\partial u}{\partial z}$ verschwindet und erhalten

$$\frac{u-u_0}{u_0} + \frac{B}{2A}\left\{\frac{z^2}{h^2} + \frac{2z}{h} - \frac{2Hz}{h^2} - \frac{2H}{h} + \frac{H^2}{h^2}\right\}$$
$$= \frac{dh}{dx} \frac{1}{Ag} \int_z^H \frac{dz}{H} \int_{H-h}^z \left\{\left(\frac{u}{u_0}\right)^2 - \int_{H-h}^H \left(\frac{u}{u_0}\right)^2 \frac{dz}{h}\right\} \frac{dz}{h} \tag{112}$$

und

$$\frac{u-u_0}{u_0} - \frac{2B}{3A}\left(1 - \frac{\varrho^3}{R^3}\right) = 4 \frac{dR}{dx} \frac{1}{Ag} \int_\varrho^R \frac{dr}{R} \int_0^\varrho \left\{\left(\frac{u}{u_0}\right)^2 - 2\int_0^R \left(\frac{u}{u_0}\right)^2 \frac{\varrho}{R} \frac{d\varrho}{R}\right\} \frac{\varrho}{R} \frac{d\varrho}{R}.$$

Vernachlässigt man das Glied auf der rechten Seite, so erhält man für $h = H$ die früheren Formeln 111a). Betrachtet man

diese als erste Näherung und setzt sie in die jetzt erhaltenen ein, so erhält man als zweite Näherung für $h = H$

$$\frac{U}{u_0} = 1 + \frac{B}{3A} + \frac{2B}{45A}\left(1 + \frac{2B}{7A}\right)\frac{dh}{dx}\frac{1}{Ag}$$

oder

$$= 1 + \frac{2B}{5A} + \frac{2B}{25A}\left(1 + \frac{4B}{11A}\right)\frac{dR}{dx}\frac{1}{Ag}. \tag{113}$$

Diese Formeln erlauben $\frac{dh}{dx}$ zu berechnen. Wir beschränken uns auf den Canal mit rechteckigem Querschnitt.

Wir bilden zu dem Ende den Mittelwerth von u^2, nämlich $\bar{u}^2 = \frac{1}{h}\int\limits_0^h u^2 dz$; u^2 wird aus den Formeln 111a) entnommen und ergiebt, wenn wir $u_0 = \sqrt{\frac{h \sin \alpha}{B}}$ mittelst der Formeln 108) durch U ausdrücken

$$\bar{u}^2 = (1 + \varepsilon)\,U^2, \qquad \varepsilon = \frac{B^2}{5(3A + B)^2}$$

und daraus nach 111b)

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{(1+\varepsilon)}{h}\frac{dh}{dx}U^2. \tag{114}$$

Aus den Formeln 113) und 111) ergiebt sich, wenn man Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt

$$U' = \frac{\partial U}{\partial t},$$

$$B u_0^2 = b U^2 - \frac{\varkappa}{g}\frac{dh}{dx}U^2 = \left(\sin\alpha - \frac{dh}{dx} - \frac{U'}{g}\right)h$$

$$\begin{cases} b = 0{,}0004 \\ \varkappa = 0{,}00036,\ h \sin\alpha = 0{,}0004\ U^2. \end{cases} \tag{115}$$

Durch den Querschnitt ha des Canals (a ist seine Breite) fliesst überall die Wassermenge $Q = Uha$. Betrachten wir das constante Gefälle als erste Näherung, so ist $h = H$ und

$$B u_0^2 = b U^2 = H \sin\alpha,$$

$$b U^2 H^2 a^2 = b Q^2 = \sin\alpha H^3 a^2 = b U^2 h^2 a^2.$$

Setzen wir diese ersten Näherungswerthe ein, so erhalten wir aus 115) und 114), da nach der letzten Gleichung

$$bU^2 = \frac{\sin\alpha\, H^3}{h^2} \quad \text{ist,}$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{bg\left\{h^3 - H^3\right\}\sin\alpha}{bgh^3 - (1+\varepsilon+\varkappa)\, H^3 \sin\alpha} \qquad 116)$$

oder

$$\frac{dx}{dh} = \frac{a_1 h^3 - b_1 H^3}{a_2\,(h^3 - H^3)},$$

wo zur Abkürzung $a_2 = bg \sin\alpha$, $a_1 = bg$, $b_1 = (1 + \varepsilon + \varkappa)\sin\alpha$ gesetzt ist.

Wir können auch schreiben

$$\frac{dx}{dh} = \frac{a_1}{a_2} - \frac{(b_1 - a_1)\, H^3}{a_2\,(h^3 - H^3)}$$

und erhalten durch Integration

$$x = \frac{a_1}{a_2}\, h + \frac{(b_1 - a_1)\, H}{3a_2}\left\{\tfrac{1}{2}\log\frac{(H^2 + Hh + h^2)}{(H-h)^2} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2h+H}{\sqrt{3}\,H}\right\}. \qquad 117)$$

Hierdurch ist die Gestalt der Oberfläche des fliessenden Wassers bestimmt. Doch ist hier auf die hydrodynamische Bedingung, dass der Druck an der Oberfläche einen constanten Werth haben muss, überhaupt keine Rücksicht genommen, sodass diese Entwicklungen kaum grösseren Werth als den empirischer Formeln haben.

Ueber die Ableitung der Bewegungsgleichungen für reibende Flüssigkeiten vgl. S. 52.

Der Minimalsatz der verzehrten Energie bei schwacher stationärer Strömung rührt von Helmholtz her (Ges. Abh. I, S. 223), die Einführung äusserer Kräfte, welche die Trägheit aufheben, von Rayleigh (Phil. Mag., Oct. 1893). Die Bewegungen einer Kugel in einer reibenden Flüssigkeit ist behandelt von Stokes (Transact. of the Cambr. Phil. Soc. 9, 1851), O. E. Meyer (Crelle, Bd. 73), Kirchhoff (Mechanik, 26. Vorlesung). Die drehenden Schwingungen einer mit Flüssigkeit gefüllten Kugel sind von Helmholtz abgeleitet (Ges. Abh. I, S. 196), die eines Cylinders von O. E. Meyer (Wied. Ann. 43, S. 1, 1891); die beiden letzten Bewegungen sind zur Bestimmung der Reibungsconstante verwendet worden, die Schwingungen einer mit Flüssigkeit gefüllten Hohlkugel von Piotrowski (Helmholtz, Ges. Abh. I, S. 172), die eines Cylinders

von Mützel (Wied. Ann. 43, S. 15, 1891). Die Strömungen in einem langen Cylinder sind zur Bestimmung der Reibungsconstanten von Poiseuille (Compt. rend. 15, S. 1167, 1842) benutzt worden. Diese experimentellen Ergebnisse wurden aus der Hydrodynamik abgeleitet von Hagenbach (Pogg. Ann. 109, S. 385, 1860) und F. Neumann (Einleit. in die theoret. Physik S. 246, 1883).

Die Ergebnisse der beiden Methoden zeigen noch immer keine vollkommene Uebereinstimmung. Aus den Piotrowski'schen Werthen ergab sich ein von Null verschiedener Werth für den Gleitungscoefficienten, während alle anderen Beobachter fanden, dass der Gleitungscoefficient an festen Körpern verschwindet. Vgl. W. König (Wied. Ann. 25, S. 618, 1885), O. E. Meyer (Wied. Ann. 32, S. 642, 1887). Nach den Beobachtungen von Warburg ist sogar der Gleitungscoefficient zwischen Quecksilber und Glas gleich Null, trotzdem hier keine Benetzung stattfindet (Pogg. Ann. 140, 1870). Eine Wiederholung der Piotrowski'schen Versuche und namentlich Versuche darüber, ob künstlich (elektrolytisch) entwickelte Gasschichten den Gleitungscoefficienten verändern, wäre dringend erwünscht.

Die oben gegebenen Resultate über den Einfluss der Reibung auf die Wellenbewegung sind zum Theil von Lamb abgeleitet (Hydrodynamics Art. 302). Die Veränderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und die Dämpfung der Schallwellen durch Reibung sind von Helmholtz angegeben (Ges. Abh. I, S. 383).

Die durch die Fluthreibung verursachten Strömungen sind von Hertz abgeleitet (Ges. Abh. I, S. 223). Die Theorie flacher Cyklonen mit Berücksichtigung der Reibung an der Erdoberfläche rührt von Oberbeck her (Wied. Ann. 17, S. 128, 1882) und ist von Pockels vervollständigt (Meteorolog. Zeitschrift).

Dass die Strömung in weiteren Röhren aufhöre der gewöhnlich angenommenen Theorie zu folgen, wonach nur Bewegungen parallel der Axe vorhanden sind, ist von Reynold's (Phil. Trans. 1883) beobachtet. Hiernach ist Uebereinstimmung mit der Theorie nur in Röhren zu erwarten, in denen die Geschwindigkeit einen bestimmten, vom Radius der Röhre und den Reibungscoefficienten abhängigen Werth nicht übersteigt. Die Theorie ist vorläufig nicht im Stande, hiervon Rechenschaft zu geben. Noch schwieriger ist das Problem frei fliessender Gewässer. Die sehr hypothetische, oben gegebene Theorie rührt von Boussinesq her (Compt. rend. 71, S. 389, 1870 und 73, S. 34 u. 101, 1871).

VIII. Gleichgewicht rotirender flüssiger Massen.

Das Problem der Gleichgewichtsform rotirender flüssiger Massen ist von grosser Wichtigkeit für die Frage nach der Gestalt der Himmelskörper.

Sehr einfach ist die Aufgabe, wenn die Flüssigkeit mit constanter Drehungsgeschwindigkeit $\mathfrak{y}_0$ um die z-Axe rotirt und die äusseren Kräfte $\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}, \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z}$ wirken. Nach den Gleichungen 10) Abschn. II ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathfrak{V}-P)}{\partial \varrho} &= -\mathfrak{y}_0^2 \varrho, \\ \frac{\partial(\mathfrak{V}-P)}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \qquad 1)$$

und
$$\mathfrak{V} - P + \frac{\mathfrak{y}_0^2 \varrho^2}{2} = \text{const}.$$

Wenn eine freie Oberfläche vorhanden ist, so ist die Flüssigkeit als incompressibel anzunehmen und es ist dann $P = \text{const}$ in dieser Oberfläche. Also ist

$$\mathfrak{V} + \frac{\mathfrak{y}_0^2 \varrho^2}{2} = \text{const}$$

die Gleichung der Oberfläche.

Ist z. B. $\mathfrak{V} = -gz$, also die Schwere allein in der Richtung $-z$ wirksam, so ist

$$2gz = \mathfrak{y}_0^2 \varrho^2. \qquad 2)$$

Die Oberfläche der Flüssigkeit ist ein Rotationsparaboloid.

Bei den ausgedehnten Massen der Himmelskörper kommt die Verwicklung hinzu, dass die einzelnen Theile der flüssigen Massen sich nach dem Newton'schen Gesetze anziehen.

Die nicht stationäre Bewegung eines solchen Ellipsoids ist zuerst von Dirichlet mit Hülfe der Lagrange'schen Differentialgleichungen behandelt worden und wir wollen seinen Entwicklungen im Wesentlichen folgen.

Die wesentliche mathematische Grundlage bildet die Thatsache, dass den Gleichungen genügt wird, wenn die Coordinaten eines Flüssigkeitstheilchens linearen Ausdrücken der Anfangswerthe gleichgesetzt werden, deren Coefficienten nur Functionen der Zeit sind.

Wir setzen also

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c, \\ y &= \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c, \\ z &= \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c. \end{aligned} \tag{3}$$

Der Mittelpunkt des Ellipsoids bleibt nach dem Satz vom Schwerpunkt an seiner Lage.

Es ist nun zu zeigen, dass durch diese Ausdrücke die Differentialgleichungen 30) Abschnitt I befriedigt werden und sich so bestimmen lassen, dass eine freie Oberfläche möglich ist, auf der ein constanter Druck herrscht und dass die einzelnen Theile der flüssigen Masse sich nach dem Newton'schen Gesetz anziehen.

Der Anfangspunkt der Coordinaten falle in den Mittelpunkt des Ellipsoids und die anfängliche Oberfläche habe die Gleichung

$$\frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2} + \frac{c^2}{C^2} = 1. \tag{4}$$

Die Continuitätsgleichung ergiebt sich für die Anfangszeit, wenn wir die Gleichung nach t differenziren und dann

$$\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial c} = 0$$

bilden als

$$\frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{d\beta_2}{dt} + \frac{d\gamma_3}{dt} = 0. \tag{5}$$

Der Vorzug der Lagrange'schen Gleichungen zeigt sich in der Bedingung der freien Oberfläche. Diese ist erfüllt, wenn die Gleichung 4) die Oberfläche zu jeder Zeit darstellt. Setzt man x, y, z ein, so ergiebt sich leicht, dass die Oberfläche zu jeder Zeit ein Ellipsoid ist.

Das Potential der anziehenden Kräfte ist eine homogene Function zweiten Grades der Coordinaten, also

$$\mathfrak{V} = H - Ka^2 - Lb^2 - Mc^2 - 2K'bc - 2L'ca - 2M'ab, \qquad 6)$$

wo die Coefficienten Functionen der Zeit sind.

Der Druck ist

$$p = \text{const} + f\left(1 - \frac{a^2}{A^2} - \frac{b^2}{B^2} - \frac{c^2}{C^2}\right). \qquad 7)$$

Hiermit genügen wir der Bedingung constanten Drucks in der Oberfläche. Setzen wir die Ausdrücke für x, y, z in die Gleichungen 30) Abschnitt I ein und beachten, dass

$$X = \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial a} = \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a},$$

$$Y = \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial b} = \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b},$$

$$Z = \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial c} = \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c}$$

ist; dass ferner die Coefficienten von a, b, c einzeln verschwinden müssen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \alpha_2 \frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d^2\alpha_3}{dt^2} &= -2K + \frac{2f}{A^2}, \\
\alpha_1 \frac{d^2\beta_1}{dt^2} + \alpha_2 \frac{d^2\beta_2}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d^2\beta_3}{dt^2} &= -2M', \\
\alpha_1 \frac{d^2\gamma_1}{dt^2} + \alpha_2 \frac{d^2\gamma_2}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d^2\gamma_3}{dt^2} &= -2L', \\
\beta_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \beta_3 \frac{d^2\alpha_3}{dt^2} &= -2M', \\
\beta_1 \frac{d^2\beta_1}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2\beta_2}{dt^2} + \beta_3 \frac{d^2\beta_3}{dt^2} &= -2L + \frac{2f}{B^2}, \qquad 8) \\
\beta_1 \frac{d^2\gamma_1}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2\gamma_2}{dt^2} + \beta_3 \frac{d^2\gamma_3}{dt^2} &= -2K', \\
\gamma_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \gamma_3 \frac{d^2\alpha_3}{dt^2} &= -2L', \\
\gamma_1 \frac{d^2\beta_1}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2\beta_2}{dt^2} + \gamma_3 \frac{d^2\beta_3}{dt^2} &= -2K', \\
\gamma_1 \frac{d^2\gamma_1}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2\gamma_2}{dt^2} + \gamma_3 \frac{d^2\gamma_3}{dt^2} &= -2M + \frac{2f}{C^2}.
\end{aligned}$$

Drei Integrale dieser Differentialgleichungen erhält man, wenn man die Gleichungen, welche K', L', M' enthalten, von einander abzieht, nämlich

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \frac{d\beta_1}{dt} - \beta_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + \alpha_2 \frac{d\beta_2}{dt} - \beta_2 \frac{d\alpha_2}{dt} + \alpha_3 \frac{d\beta_3}{dt} - \beta_3 \frac{d\alpha_3}{dt} &= \mathfrak{A}, \\
\beta_1 \frac{d\gamma_1}{dt} - \gamma_1 \frac{d\beta_1}{dt} + \beta_2 \frac{d\gamma_2}{dt} - \gamma_2 \frac{d\beta_2}{dt} + \beta_3 \frac{d\gamma_3}{dt} - \gamma_3 \frac{d\beta_3}{dt} &= \mathfrak{B}, \qquad 9) \\
\gamma_1 \frac{d\alpha_1}{dt} - \alpha_1 \frac{d\gamma_1}{dt} + \gamma_2 \frac{d\alpha_2}{dt} - \alpha_2 \frac{d\gamma_2}{dt} + \gamma_3 \frac{d\alpha_3}{dt} - \alpha_3 \frac{d\gamma_3}{dt} &= \mathfrak{C},
\end{aligned}$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ Constanten sind.

Ferner liefert das Princip der Erhaltung der Flächen drei Integrale

$$\begin{aligned}
\int\!\!\int\!\!\int \left(y \frac{dx}{dt} - z \frac{dy}{dt}\right) dx\, dy\, dz &= \text{const}, \\
\int\!\!\int\!\!\int \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt}\right) dx\, dy\, dz &= \text{const}, \\
\int\!\!\int\!\!\int \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right) dx\, dy\, dz &= \text{const}.
\end{aligned}$$

Drückt man x, y, z durch a, b, c aus und berücksichtigt, dass

$$\int\!\!\int\!\!\int a^2 da\, db\, dc = \frac{\mathfrak{M}}{5} A^2, \qquad \int\!\!\int\!\!\int b^2 da\, db\, dc = \frac{\mathfrak{M}}{5} B^2,$$

$$\int\!\!\int\!\!\int c^2 da\, db\, dc = \frac{\mathfrak{M}}{5} C^2, \quad \mathfrak{M} = \frac{4\pi ABC}{3},$$

$$\int\!\!\int\!\!\int bc\, da\, db\, dc = 0, \qquad \int\!\!\int\!\!\int ca\, da\, db\, dc = 0,$$

$$\int\!\!\int\!\!\int ab\, da\, db\, dc = 0$$

ist, wenn man die Integrationen über das Ellipsoid erstreckt, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
A^2 \left(\alpha_2 \frac{d\alpha_3}{dt} - \alpha_3 \frac{d\alpha_2}{dt}\right) + B^2 \left(\beta_2 \frac{d\beta_3}{dt} - \beta_3 \frac{d\beta_2}{dt}\right) \\
+ C^2 \left(\gamma_2 \frac{d\gamma_3}{dt} - \gamma_3 \frac{d\gamma_2}{dt}\right) = \text{const}, \\
A^2 \left(\alpha_3 \frac{d\alpha_1}{dt} - \alpha_1 \frac{d\alpha_3}{dt}\right) + B^2 \left(\beta_3 \frac{d\beta_1}{dt} - \beta_1 \frac{d\beta_3}{dt}\right) \qquad 10) \\
+ C^2 \left(\gamma_3 \frac{d\gamma_1}{dt} - \gamma_1 \frac{d\gamma_3}{dt}\right) = \text{const},
\end{aligned}$$

$$A^2\left(\alpha_1 \frac{d\alpha_2}{dt} - \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{dt}\right) + B^2\left(\beta_1 \frac{d\beta_2}{dt} - \beta_2 \frac{d\beta_1}{dt}\right)$$
$$+ C^2\left(\gamma_1 \frac{d\gamma_2}{dt} - \gamma_2 \frac{d\gamma_1}{dt}\right) = \text{const.}$$

Ein siebentes Integral liefert der Satz der lebendigen Kraft. Nach diesem ist

$$F + L = \text{const}, \tag{11)}$$

wenn L die gesammte lebendige Kraft und F die potentielle Energie der Flüssigkeitsmasse bezeichnen, deren Berechnung durch einfache Integrationen geschieht.

Um den Werth der Grössen K, L, M zu bestimmen, hat man in dem für $\mathfrak{V}$ gegebenen Ausdruck die x, y, z durch a, b, c zu ersetzen.

Im allgemeinen Fall führt das zu ziemlich verwickelten Ergebnissen. Die Integration der allgemeinen Differentialgleichungen, welche nach Elimination von f auf 8 Gleichungen zweiter Ordnung führt, wird durch die Kenntniss der sieben Integrale auf ein System neunter Ordnung zurückgeführt.

Die vollständige Lösung ist daher nur unter speciellen Voraussetzungen zu erwarten. Für die wirkliche Ausführung der allgemeinen Integration hat Riemann eine besondere Umformung angegeben, durch welche das allgemeine System auf Eins siebenter Ordnung zurückgeführt wird.

Wir beschränken uns hier auf die Behandlung der von Dirichlet untersuchten Specialfälle. Wir nehmen an, dass Anfangs in Bezug auf die Gestalt der Oberfläche, also auch auf die Bewegung Symmetrie hinsichtlich einer Axe stattfindet, dass also zunächst $B = A$ ist. Die Geschwindigkeiten sind

$$\begin{aligned} u &= \frac{d\alpha_1}{dt} a + \frac{d\beta_1}{dt} b + \frac{d\gamma_1}{dt} c, \\ v &= \frac{d\alpha_2}{dt} a + \frac{d\beta_2}{dt} b + \frac{d\gamma_2}{dt} c, \\ w &= \frac{d\alpha_3}{dt} a + \frac{d\beta_3}{dt} b + \frac{d\gamma_3}{dt} c. \end{aligned} \tag{12)}$$

Durch eine Drehung des Coordinatensystems um die c-Axe um einen Winkel ϑ darf für $t = 0$ an den Geschwindigkeiten nichts geändert werden; wenn

$$a_1 = a \cos \vartheta - b \sin \vartheta,$$
$$b_1 = a \sin \vartheta + b \cos \vartheta,$$

die neuen Coordinaten sind, so müssen

$$u_1 = u \cos \vartheta - v \sin \vartheta,$$
$$v_1 = u \sin \vartheta + v \cos \vartheta,$$

die neuen Geschwindigkeiten sein und w muss ungeändert bleiben.

Daraus folgt für $t = 0$

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{d\beta_2}{dt}, \quad \frac{d\alpha_2}{dt} = -\frac{d\beta_1}{dt}, \qquad 13)$$
$$\frac{d\gamma_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = 0, \quad \frac{d\alpha_3}{dt} = 0, \quad \frac{d\beta_3}{dt} = 0.$$

Hierzu kommt dann noch die Gleichung

$$\frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{d\beta_2}{dt} + \frac{d\gamma_3}{dt} = 0.$$

Daher können wir für $t = 0$ setzen

$$u = la + mb, \quad v = -ma + lb, \quad w = -2lc. \qquad 14)$$

Die Bewegung besteht aus einer Strömung parallel der c-Axe mit der anfänglichen Geschwindigkeit $-2lc$, aus einer Drehung um die c-Axe mit einer Winkelgeschwindigkeit m, aus einer radialen Strömung von der c-Axe fort mit der Geschwindigkeit $l\sqrt{a^2 + b^2}$.

Aus der Symmetrie der Geschwindigkeiten folgt, dass die Symmetrie in der Lage zu jeder andern Zeit besteht. Es muss daher

$$\alpha_1 = \beta_2, \quad \alpha_2 = -\beta_1,$$
$$\gamma_1 = \gamma_2 = \alpha_3 = \beta_3 = 0$$

sein. Die Gleichung der Continuität für beliebige Zeit erfüllen wir nach Gleichung 31) Abschnitt I, wenn wir die Determinante $D = 1$ setzen.

In unserm Falle ist

$$D = (\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2)\,\gamma_3; \qquad 15)$$

dann ist die Dichtigkeit gleich Eins. Daher ist

$$u = \frac{d\alpha_1}{dt} a - \frac{d\alpha_2}{dt} b, \qquad a = \alpha_1\gamma_3 x - \beta_1\gamma_3 y,$$
$$v = -\frac{d\beta_1}{dt} a + \frac{d\beta_2}{dt} b, \qquad b = \beta_1\gamma_3 x + \alpha_1\gamma_3 y, \qquad c = \frac{1}{\gamma_3} z \tag{15a}$$

und

$$\frac{\gamma_3}{A^2}(x^2 + y^2) + \frac{z^2}{C^2\gamma_3^2} = 1 \tag{15b}$$

ist die Gleichung der Oberfläche.

Das Potential $\mathfrak{B}$ ist das der gravitirenden Kräfte des Ellipsoids. Bei einem dreiaxigen Ellipsoid, dessen Halbaxen A, B, C sind (vgl. Kirchhoff, Mechanik, 18. Vorlesung), ist

$$\mathfrak{B} = \pi ABC\int_0^\infty d\varepsilon_1 \frac{1 - \frac{x^2}{A^2+\varepsilon_1} - \frac{y^2}{B^2+\varepsilon_1} - \frac{z^2}{C^2+\varepsilon_1}}{\sqrt{(A^2+\varepsilon_1)(B^2+\varepsilon_1)(C^2+\varepsilon_1)}}. \tag{16}$$

In unserm Falle ist also

$$\mathfrak{B} = \pi A^2 C\int_0^\infty d\varepsilon_1 \frac{1 - \frac{x^2+y^2}{\frac{A^2}{\gamma_3}+\varepsilon_1} - \frac{z^2}{C^2\gamma_3^2+\varepsilon_1}}{\left(\frac{A^2}{\gamma_3}+\varepsilon_1\right)\sqrt{C^2\gamma_3^2+\varepsilon_1}} \tag{17}$$

oder nach 15) und 15a)

$$\mathfrak{B} = \pi A^2 C\int_0^\infty \gamma_3 d\varepsilon_1 \frac{1 - \frac{a^2+b^2}{A^2+\varepsilon_1\gamma_3} - \frac{c^2\gamma_3^2}{C^2\gamma_3^2+\varepsilon_1}}{(A^2+\varepsilon_1\gamma_3)\sqrt{C^2\gamma_3^2+\varepsilon_1}}. \tag{18}$$

Hiernach ist also

$$K = L = \pi\int_0^\infty d\varepsilon_1 \frac{\gamma_3}{(A^2+\varepsilon_1\gamma_3)^2\sqrt{C^2\gamma_3^2+\varepsilon_1}},$$
$$M = \pi\int_0^\infty d\varepsilon_1 \frac{\gamma_3^3}{(A^2+\varepsilon_1\gamma_3)\sqrt{(C^2\gamma_3^2+\varepsilon_1)^3}}, \tag{19}$$
$$K' = L' = M' = 0.$$

Hiernach sind vier der Differentialgleichungen 8) identisch erfüllt. Die andern reduciren sich auf die drei folgenden

$$\alpha_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \beta_1 \frac{d^2\beta_1}{dt^2} = -2L + \frac{2f}{A^2},$$

$$\gamma_3 \frac{d\gamma_3}{dt} = -2M + \frac{2f}{C^2}, \tag{20}$$

$$\alpha_1 \frac{d^2\beta_1}{dt^2} - \beta_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} = 0.$$

Dazu kommt die Gleichung

$$(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\gamma_3 = 1. \tag{20 a}$$

Die Integration dieser vier Gleichungen liefert die vollständige Lösung. Die dritte Gleichung lässt sich nach t integriren und giebt

$$\alpha_1 \frac{d\beta_1}{dt} - \beta_1 \frac{d\alpha_1}{dt} = \text{const} = \omega. \tag{21}$$

Aus der vierten folgt

$$\alpha_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta_1}{dt} = -\frac{1}{2\gamma_3^2}\frac{d\gamma_3}{dt}, \tag{22}$$

$$\alpha_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \beta_1 \frac{d^2\beta_1}{dt^2} + \left(\frac{d\alpha_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta_1}{dt}\right)^2 = -\frac{1}{2\gamma_3^2}\frac{d^2\gamma_3}{dt^2} + \frac{1}{\gamma_3}\left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2. \tag{23}$$

Quadrirt und addirt man die Gleichungen 21) und 22), so folgt mit Berücksichtigung von 20a)

$$\frac{1}{\gamma_3}\left\{\left(\frac{d\alpha_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta_1}{dt}\right)^2\right\} = \omega^2 + \frac{1}{4\gamma_3^4}\left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2$$

und 23) wird hierdurch

$$\alpha_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \beta_1 \frac{d^2\beta_1}{dt^2} = -\omega^2\gamma_3 + \frac{3}{4\gamma_3^3}\left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2\gamma_3^2}\frac{d^2\gamma_3}{dt^2}. \tag{24}$$

Wir erhalten also aus 24) und 20)

$$-\frac{1}{2\gamma_3^2}\frac{d^2\gamma_3}{dt^2} + \frac{3}{4\gamma_3^3}\left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2 - \omega^2\gamma_3 = \frac{2f}{A^2} - 2L, \tag{25}$$

$$\gamma_3 \frac{d^2\gamma_3}{dt_2} = \frac{2f}{C^2} - 2M \tag{26}$$

zur Bestimmung von γ_3 und f.

Die Werthe von L und M sind nach 19)

$$L = \frac{\pi A^2 C \frac{1}{\gamma_3}}{C^2\gamma_3^2 - \frac{A^2}{\gamma_3}} \left\{ \frac{C^2}{A^2}\gamma_3^2 + \frac{1}{2\sqrt{C^2\gamma_3^2 - \frac{A^2}{\gamma_3}}} \log \frac{C\gamma_3 - \sqrt{C^2\gamma_3^2 - \frac{A^2}{\gamma_3}}}{C\gamma_3 + \sqrt{C^2\gamma_3^2 - \frac{A^2}{\gamma_3}}} \right\}$$

$$M = -2\pi \frac{A^2 C\gamma_3^2}{C^2\gamma_3^2 - \frac{A^2}{\gamma_3}} \left\{ \frac{1}{C\gamma_3} + \frac{1}{2\sqrt{C^2\gamma_3^2 - \frac{A^2}{\gamma_3}}} \log \frac{C\gamma_3 - \sqrt{C^2\gamma_3^2 - \frac{A^2}{\gamma_3}}}{C\gamma_3 - \sqrt{C^2\gamma_3^2 - \frac{A^2}{\gamma_3}}} \right\}$$

$$C^2 > \frac{A^2}{\gamma_3^3},$$

und 27)

$$L = + \frac{\pi A^2 C \frac{1}{\gamma_3}}{C^2\gamma_3^2 - \frac{A^2}{\gamma_3}} \left\{ \frac{C\gamma_3^2}{A^2} - \frac{1}{\sqrt{C^2\gamma_3^2 - \frac{A^2}{\gamma_3}}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\frac{A^2}{\gamma_3} - C^2\gamma_3^2}}{C\gamma_3} \right\}$$

$$M = -\frac{2\pi A^2 C\gamma_3^2}{C^2\gamma_3^2 - \frac{A^2}{\gamma_3}} \left\{ \frac{1}{C\gamma_3} - \frac{1}{\sqrt{C^2\gamma_3^2 - \frac{A^2}{\gamma_3}}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\frac{A^2}{\gamma_3} - C^2\gamma_3^2}}{C\gamma_3} \right\}$$

$$C^2 < \frac{A^2}{\gamma_3^3}.$$

Multipliciren wir die Gleichung 25) mit γ_3^2, die Gleichung 26) mit $\frac{1}{2\gamma_3^2}$ und addiren sie, so erhalten wir mit Berücksichtigung der Werthe von L und M

$$f\left(\frac{2\gamma_3}{A^2} + \frac{1}{C^2\gamma_3^2}\right) = 2\pi - \omega^2\gamma_3^2 + \frac{3}{4\gamma_3^2}\left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2. \tag{28}$$

Multipliciren wir die Gleichung 26) mit $\frac{C^2}{\gamma_3}$, die Gleichung 25) mit $\frac{A^2}{\gamma_3}$ und ziehen sie von einander ab, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} \left(\frac{A^2}{2\gamma_3^3} + C^2\right)\frac{d^2\gamma_3}{dt^2} - \frac{3A^3}{4\gamma_3^4}\left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2 + \omega^2 A^2 &= \frac{2}{\gamma_3}(LA^2 - C^2 M) \\ &= 2\pi \int_0^\infty \frac{\varepsilon_1 d\varepsilon_1 (A^2 - C^2\gamma_3^3) A^2 C}{(A^2 + \gamma_3\varepsilon_1)^2 \sqrt{(C^2\gamma_3^2 + \varepsilon_1)^3}}. \end{aligned} \tag{29}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $2\frac{d\gamma_3}{dt}$ und integrirt nach t, so erhält man die Energie des Systems

$$\left(\frac{A^2}{2\gamma_3^3}+C^2\right)\left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2+2A^2\omega^2\gamma_3-4\pi\int\limits_0^\infty\frac{d\varepsilon_1\, A^2C\gamma_3}{(A^2+\gamma_3\varepsilon_1)\sqrt{C^2\gamma_3^2+\varepsilon_1}}=\text{const.} \quad 30)$$

Wir führen nun zur Abkürzung die Bezeichnungen ein

$$\alpha=\frac{C\gamma_3}{\sqrt[3]{A^2C}}, \qquad D=\sqrt[3]{A^2C},$$

$$F(\alpha)=\int\limits_0^\infty\frac{d\sigma}{(1+\alpha\sigma)\sqrt{1+\frac{\sigma}{\alpha^2}}}, \qquad \chi=\frac{\omega\gamma_3}{\sqrt{2\pi}},$$

$$\sigma=\frac{\varepsilon_1}{D^2},$$

so werden die drei erhaltenen Gleichungen 28), 29), 30)

$$\frac{f}{D^2}\left(2\alpha+\frac{1}{\alpha^2}\right)=2\pi(1-\chi^2)+\frac{3}{4\alpha^2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2, \quad 31)$$

$$\left(1+\frac{1}{2\alpha^3}\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2}-\frac{3}{4\alpha^4}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+2\pi\left(\frac{\omega^2}{2\pi}\sqrt[3]{\frac{A^4}{C^4}}-\frac{dF(\alpha)}{d\alpha}\right)=0, \quad 32)$$

$$\left(1+\frac{1}{2\alpha^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+4\pi\left\{\frac{\omega^2}{2\pi}\sqrt[3]{\frac{A^4}{C^4}}\,\alpha-F(\alpha)\right\}=\text{const.} \quad 33)$$

Hier ist die letzte Gleichung das Integral der vorletzten. Für die Discussion ist es aber zweckmässig, beide Gleichungen zu verfolgen.

Es ist

$$\left.\begin{aligned} F(\alpha)&=\frac{1}{\alpha\sqrt{\frac{1}{\alpha^3}-1}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{\frac{1}{\alpha^3}-1}}{2-\frac{1}{\alpha^3}} \qquad \alpha<1,\\ F(\alpha)&=\frac{1}{\alpha\sqrt{1-\frac{1}{\alpha^3}}}\log\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{\alpha^3}}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{\alpha^3}}} \qquad \alpha>1,\end{aligned}\right\} \quad 34)$$

für $\alpha=1$ ist $F(1)=2$.

Für sehr grosse und sehr kleine Werthe von α wird $F(\alpha)$ klein. Bildet man

$$\frac{dF}{d\alpha} = \left(\frac{1}{\alpha^3} - 1\right) \int_0^\infty \frac{\sigma d\sigma}{(1+\alpha\sigma)^2 \left(\sqrt{1+\frac{\sigma}{\alpha^2}}\right)^3},$$

so ergiebt sich, dass $f(\alpha)$ nur ein Maximum für $\alpha = 1$ hat.

Die Werthe von $F(\alpha)$ liegen zwischen Null und 2 und zwar hat die Gleichung $F(\alpha) = \text{const}$ zwei Wurzeln, von denen eine grösser, die andere kleiner als 1 ist.

Betrachten wir zunächst den Fall, dass keine Rotation vorhanden, also $\omega = 0$ ist. Dann haben wir die Gleichungen

$$\frac{f}{D^2}\left(2\alpha + \frac{1}{\alpha^2}\right) = 2\pi + \tfrac{3}{4}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dt}\right)^2, \tag{35}$$

$$\left(1 + \frac{1}{2\alpha^3}\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{3}{4\alpha^4}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - 2\pi\frac{dF}{d\alpha} = 0, \tag{36}$$

$$\left(1 + \frac{1}{2\alpha^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - 4\pi F(\alpha) = \text{const}. \tag{37}$$

Wenn zur Zeit $t = t_0$ keine Bewegung vorhanden war, also $\frac{d\alpha}{dt} = 0$ ist, so ist

$$\text{const} = -4\pi F(\alpha_0), \quad \text{also}$$

$$\left(1 + \frac{1}{2\alpha^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = 4\pi\,[F(\alpha) - F(\alpha_0)].$$

Es ist also immer $F(\alpha) > F(\alpha_0)$.

Ist $\gamma_3 = 1$ für $t = t_0$, fällt also die Symmetrieaxe mit der z-Axe zusammen, so wird $\alpha_0 = \frac{C}{\sqrt[3]{A^2 C}}$.

Ist die ursprüngliche Gestalt der flüssigen Masse eine Kugel, so ist $\alpha_0 = 1$. Da aber $F(1)$ der Maximalwerth von F ist, so muss auch α immer gleich Eins sein. Die Kugelgestalt bleibt also immer bestehen. Ist $\alpha_0 < 1$, so ist $A > C$ und $\alpha_0 < \alpha < \alpha_1$, wo α_1 die zweite Wurzel der Gleichung

$$F(\alpha) - F(\alpha_0) = 0$$

bedeutet. Es muss also α alle Werthe von α_0 bis α_1 periodisch durchlaufen; α_1 ist dann > 1.

Die Bewegung besteht also aus Schwingungen, bei denen die Flüssigkeit abwechselnd die Gestalt eines abgeplatteten und eines verlängerten Ellipsoids annimmt.

Wenn die Anfangsgeschwindigkeit von Null verschieden ist, so ist der Charakter der Bewegung nach gewahrt, wenn nur für $t = t_0$ ist

$$\left(1 + \frac{1}{2\alpha^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 < 4\pi F(\alpha);$$

wenn dagegen

$$\left(1 + \frac{1}{2\alpha^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 > 4\pi F(\alpha)$$

für $t = t_0$ ist, so kann $\frac{d\alpha}{dt}$ nicht verschwinden.

Dann ist nämlich die Constante der Gleichung 37) positiv und da $F(\alpha)$ immer positiv bleibt, so kann $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$ nicht kleiner werden als $\frac{\text{const} + 4\pi F(\alpha)}{1 + \frac{1}{2\alpha^3}}$.

Es wird also, wenn $\frac{d\alpha}{dt} > 0$ ist, α mit wachsendem t immer grösser. Es wird daher γ_3 immer grösser, nach 15a) verlängert sich das Ellipsoid immer mehr und mehr.

Ist Anfangs $\frac{d\alpha}{dt}$ negativ, so bleibt es aus demselben Grunde immer negativ und α nimmt mehr und mehr ab. Das Ellipsoid plattet sich also mit wachsender Zeit immer weiter ab.

Für f ergiebt sich aus 35)

$$f = \frac{\left[2\pi + \frac{3}{4\alpha^2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\right] D^2}{2\alpha + \frac{1}{\alpha^2}}. \qquad 38)$$

Es bleibt also immer positiv. Es kann die Bewegung der Flüssigkeit im leeren Raum bestehen, weil nach 7) der Druck im Innern nie negativ wird, auch wenn der constante Druck auf die Oberfläche Null ist.

Wenn ω von Null verschieden ist, so ist immer Rotationsbewegung vorhanden. Wir setzen zur Abkürzung

$$\psi = \frac{\alpha\omega^2}{2\pi}\sqrt[3]{\frac{A^4}{C^4}} - F$$

und demnach

$$\frac{\omega^2}{2\pi}\sqrt[3]{\frac{A^4}{C^4}} - \frac{dF}{d\alpha} = \frac{d\psi}{d\alpha}$$

und wenn α' den Werth von α, der der Gleichung

$$\frac{\omega^2}{2\pi}\sqrt[3]{\frac{A^4}{C^4}} = \frac{dF}{d\alpha} = F'$$

genügt, bezeichnet, so gehen die Gleichungen 31), 32), 33) in die folgenden über

$$\frac{f}{D^2}\left(2\alpha + \frac{1}{\alpha^2}\right) = 2\pi\left\{1 - F'(\alpha')\alpha^2\right\} + \tfrac{3}{4}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dt}\right)^2, \tag{39}$$

$$\left(1 + \frac{1}{2\alpha^3}\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{3}{4\alpha^4}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 2\pi\frac{d\psi}{d\alpha} = 0. \tag{40}$$

$$\left(1 + \frac{1}{2\alpha^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 4\pi\psi = 4\pi\left[\psi_0 + \left(1 + \frac{1}{2\alpha^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2\right]. \tag{41}$$

Aus der letzten Gleichung folgt, dass

$$\psi \leqq \psi_0 + \left(1 + \frac{1}{2\alpha^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2$$

sein muss. Da F endlich bleibt, kann α nicht über eine gewisse Grenze wachsen. Diese Grenze hängt vom Werthe von ω ab. Wenn ω endlich ist, kann das Ellipsoid sich nicht unbegrenzt verlängern. Es ist dies eine Folge der Centrifugalkraft.

Für die weitere Discussion haben wir drei Fälle zu unterscheiden.

Erstens

$$\psi_0 + \left(1 + \frac{1}{2\alpha^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2 = \psi(\alpha').$$

Aus der Definition von ψ folgt, dass $\psi_0 = 0$ für $\alpha = 0$ ist. Ferner ist $\frac{dF}{d\alpha}$ für $\alpha = 0$ positiv unendlich, $\frac{d\psi}{d\alpha}$ ist also negativ zwischen $\alpha = 0$ und $\alpha = \alpha'$, daher nimmt ψ beständig ab, wenn α von 0 bis α' wächst und erhält für $\alpha = \alpha'$ einen negativen Werth, der zugleich ein Minimum ist. Es muss also $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 = 0$ und $\alpha_0 = \alpha'$ sein.

Daher ist auch nach 32)

$$F'(\alpha_0) = \frac{\omega^2}{2\pi}\sqrt[3]{\frac{A^4}{C^4}}.$$

Nun ist

$$F'(\alpha) = \left(\frac{1}{\alpha^3} - 1\right) \int_0^\infty \frac{\sigma\, d\sigma}{(1 + \alpha\sigma)^2 \sqrt{\left(1 + \frac{\sigma}{\alpha^2}\right)^3}},$$

nur positiv, wenn $\alpha_0 < 1$. Also muss $\alpha_0 < 1$ sein.

Aus der Bedingung $\psi \leq \psi(\alpha')$ folgt, da $\psi(\alpha')$ der kleinste Werth ist, den $\psi(\alpha)$ haben kann, $\psi = \psi(\alpha') = \psi(\alpha_0)$, also $\alpha = \alpha_0$. Wir haben also in diesem Falle eine constante Rotation eines abgeplatteten Ellipsoids um die kleine Axe ohne Gestaltsänderung.

Lassen wir die z-Axe und die Symmetrieaxe zusammenfallen, so ist

$$\gamma_3 = 1, \qquad \alpha_0^2 = \alpha^2 = \sqrt[3]{\frac{C^4}{A^4}}.$$

Daher

$$\alpha^2 F'(\alpha) = \frac{\omega^2}{2\pi}.$$

Die Gleichung

$$2\alpha \frac{dF}{d\alpha} + \alpha^2 \frac{d^2F}{d\alpha^2} = 0$$

hat nur eine Wurzel $\alpha = 0{,}2246\ldots$, für welche $\alpha^2 \frac{dF}{d\alpha}$ ein Maximum wird. In unserem Falle darf also $\frac{\omega}{2\pi}$ nicht grösser als dieser numerische Werth sein. Im allgemeinen genügen daher der Gleichung

$$\frac{\omega^2}{2\pi} = \alpha_0^2\, F'(\alpha_0)$$

zwei Werthe von α_0. Es existiren also zwei verschiedene Ellipsoide und für den Grenzwerth fallen beide zusammen. Dieser Fall ist zuerst von Mac Laurin behandelt. Da $1 - F'(\alpha')\,\alpha^2 > 0$ bleibt, hat f immer einen positiven Werth. Auch in diesem Fall kann sich die Flüssigkeit im leeren Raum befinden.

Der zweite Fall ist

$$\psi_0 + \left[1 + \frac{1}{2\alpha^3}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2\right] > \psi(\alpha'),$$

$$\psi_0 + \left[1 + \frac{1}{2\alpha^3}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2\right] < 0.$$

Die letzte Bedingung ist nur erfüllbar, wenn $\psi_0 < 0$ bleibt, also

$$F(\alpha_0) > \frac{\alpha_0 \omega^2}{2\pi} \sqrt[3]{\frac{A^4}{C^4}} \quad \text{ist.}$$

Die Gleichung $\psi(\alpha) = \psi(\alpha_0) + \left(1 + \frac{1}{2\alpha^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2$ hat zwei Wurzeln α_1 und α_2, da es ein Minimum mit negativem Vorzeichen für $\alpha = \alpha'$ hat. Es ist daher $\alpha_1 < \alpha' < \alpha_2$. Da nun immer nach 41)

$$\psi \leqq \psi_0 + \left(1 + \frac{1}{2\alpha^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2$$

bleiben muss, so muss α zwischen den Grenzen α_1 und α_2 bleiben. Hier kann, wenn ω genügend gross ist,

$$F'(\alpha')\,\alpha^2 \geqq \frac{\omega^2}{2\pi} \sqrt{\frac{A^4}{C^4}}\,\alpha^2 > 1 + \frac{3}{8\pi}\left(\frac{1}{\alpha}\,\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$$

werden und f nach 39) einen negativen Werth erlangen. Dann ist der Druck an der Oberfläche von Null verschieden und die Bewegung kann nicht im leeren Raum vor sich gehen.

Da $\psi = 0$ für $\alpha = 0$ ist, so hat die Gleichung

$$\psi = \psi_0 + \left(1 + \frac{1}{2\alpha^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2$$

nur eine Wurzel, wenn im dritten Fall

$$\psi_0 + \left(1 + \frac{1}{2\alpha^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2 \geqq 0 \quad \text{ist.}$$

Da α nicht unbegrenzt wachsen kann, wenn t wächst, so wird es unbegrenzt mit t abnehmen, das Ellipsoid sich also mehr und mehr abplatten.

Die andern Fälle, in denen das Ellipsoid wie ein fester Körper um eine Axe rotirt, lassen sich am besten in folgender Behandlung übersehen.

Wir setzen

$$\begin{aligned} x &= \quad a \cos \omega t + b \sin \omega t, \\ y &= -a \sin \omega t + b \cos \omega t, \end{aligned} \qquad z = c,$$

so folgt

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y,$$

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \cos \omega t, \quad \frac{\partial x}{\partial b} = \sin \omega t,$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = - \sin \omega t, \quad \frac{\partial y}{\partial b} = \cos \omega t.$$

Nach der Gleichung der Continuität muss $\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}$ von der Zeit unabhängig sein. Diese Bedingung ist hier erfüllt. Das Potential ist nur eine Function von a, b, c, da das Ellipsoid seine Gestalt nicht ändert. Nämlich

$$\mathfrak{V} = \text{const} - Ka^2 - Lb^2 - Mc^2.$$

Die Differentialgleichungen 30) Abschnitt I geben

$$-\omega^2 + 2K - \frac{2f}{A^2} = 0 = -\omega^2 + 2L - \frac{2f}{B^2},$$

$$2M - \frac{2f}{C^2} = 0.$$

Hieraus findet man

$$2f = A^2(2K - \omega^2) = B^2(2L - \omega^2) = 2MC^2,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2(KA^2 - LB^2)}{A^2 - B^2}},$$

$$\frac{A^2B^2(L-K)}{A^2 - B^2} = MC^2.$$

Setzt man für K, L und M ihre Werthe, so wird die letzte Gleichung

$$\int\limits_0^\infty \frac{d\varepsilon_1}{\sqrt{\left(1+\frac{\varepsilon_1}{A^2}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_1}{B^2}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_1}{C^2}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_1}{A^2}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_1}{B^2}\right)}}$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{d\varepsilon_1}{\sqrt{\left(1+\frac{\varepsilon_1}{A^2}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_1}{B^2}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_1}{C^2}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_1}{C^2}\right)}}.$$

Hierdurch ist ein bestimmtes Verhältniss der Axen A, B, C des Ellipsoids vorgeschrieben. Und zwar ist, wie man unmittelbar sieht, C die kleinste Axe. Es ist dies der von Jacobi entdeckte Fall. Das Ellipsoid dreht sich um die Axe C mit der Winkelgeschwindigkeit

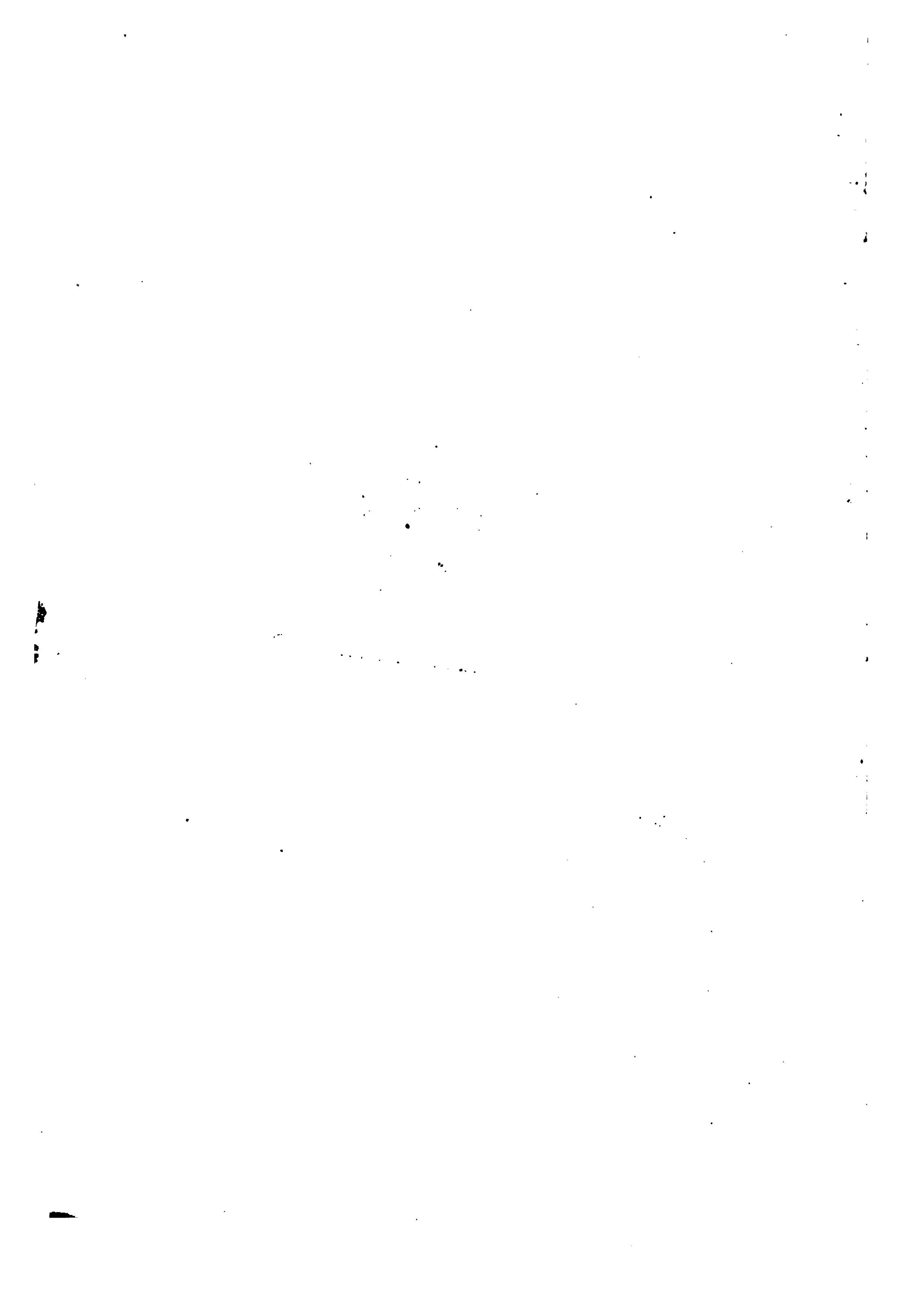
$$\omega = \sqrt{\frac{2\pi}{A^2B^2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon_1 d\varepsilon_1}{\sqrt{\left(1+\frac{\varepsilon_1}{A^2}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_1}{B^2}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_1}{C^2}\right)}\left(1+\frac{\varepsilon_1}{A^2}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_1}{B^2}\right)}}.$$

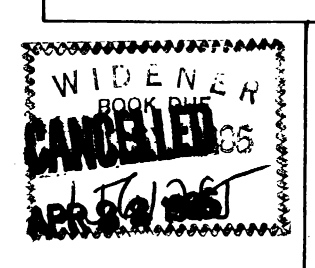
Das erste Beispiel des Gleichgewichts gravitirender flüssiger Massen ist von Mac Laurin gegeben (De causa physica fluxus et refluxus maris; 1740). Weitere Untersuchungen sind von d'Alembert und Laplace angestellt (Mécanique céleste, III, Cap. 3). Dass auch ein flüssiges Ellipsoid mit drei ungleichen Axen, das um die kleinste Axe rotirt, sich im Gleichgewicht befinden kann, hat Jacobi gezeigt (Pogg. Ann. 33; 1834).

Genauere numerische Daten über dies Ellipsoid finden sich bei Darwin (Proc. Royal. Soc. 5. Nov. 1886; Phil. Transact.; 1887). Von sehr allgemeinen Gesichtspunkten aus ist das Problem des Gleichgewichts bei unveränderlicher Gestalt des Ellipsoids von Poincaré behandelt (Acta. math. VII; 1885).

Die Untersuchung des Gleichgewichts bei veränderlicher Gestalt der Oberfläche ist zuerst von Dirichlet aufgenommen (Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik; Gött. Abh. VIII; 1860; Crelle, Bd. 58). Der wesentliche Inhalt dieser Abhandlung ist in dem vorstehenden Abschnitt wiedergegeben. Weitergeführt wurde die Untersuchung von Riemann (Gött. Abh. IX; 1861); Dedekind (Crelle, Bd. 58); Greenhill (Proc. Cam. Phil. Soc. III; 1879; IV; 1880).

Druck von **August Pries** in Leipzig.




WIDENER
BOOK DUE
CANCELLED

